

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH GIA LAI**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

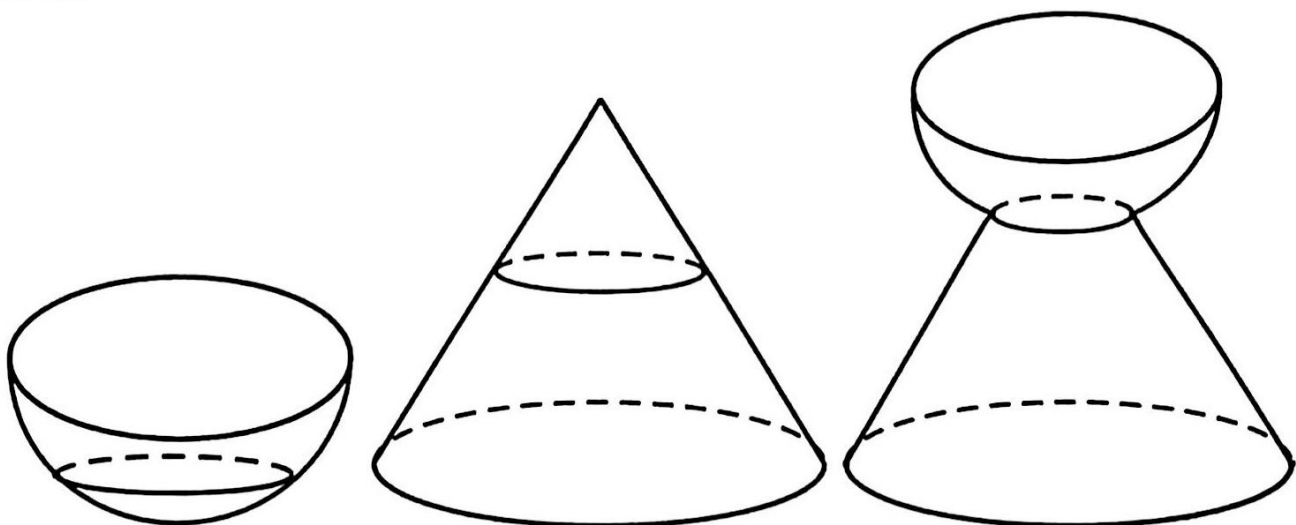
**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2025-2026**

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: **24/3/2026**

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị A và B thỏa mãn $OA^2 + OB^2 = AB^2 - 8$ (O là gốc tọa độ).

2. Có một nửa khối cầu có bán kính $R_1 = 5$ dm và một khối nón có bán kính đáy $R_2 = 9$ dm, chiều cao $h = 6$ dm. Người ta thiết kế một khối mới bằng cách cắt nửa khối cầu bởi mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa hình tròn lớn của nửa khối cầu và bỏ đi phần chòm cầu; cắt khối nón bởi mặt phẳng song song với đáy và lấy phần khối nón cụt, sao cho bán kính hình tròn của hai mặt cắt bằng nhau và ghép hai phần đó với nhau tạo thành một khối có tổng chiều cao là 8 dm (tham khảo hình vẽ). Tìm thể tích lớn nhất của khối được tạo thành.



Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình $1 - 2 \ln \frac{\sin x + 9}{(\sin x - 3)^2} = \cos 2x + 14 \sin x$.

Câu 3. (5,0 điểm)

1. Có một vòng quay gồm 40 cabin cách đều nhau, các cabin được coi như là các đỉnh của một đa giác đều. Ba bạn An, Bình và Chi lên ngẫu nhiên 3 cabin khác nhau. Tính xác suất để ba bạn lên 3 cabin tạo thành tam giác không cân, không vuông và không có cạnh của đa giác đều.

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển biểu thức $P(x) = (3 + x - x^3)^n$ với n là số nguyên dương thỏa mãn $2C_n^2 - 3A_n^2 + 144 = 0$.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Trong công viên có một hồ nước, đáy của hồ nằm trong mặt phẳng (α) và các mép trong của thành hồ giao với (α) tạo thành một tam giác ABC . Trong mặt phẳng (α) , chọn hệ trục tọa độ Oxy và tìm được $A(10; 83)$, $B(26; 20)$ và $C(82; 62)$. Người ta muốn cải tạo hồ nước bằng cách xây một đài phun nước có đáy là hình tròn nằm trong (α) sao cho hình tròn này tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC . Hãy xác định tọa độ tâm hình tròn của đáy đài phun nước.

2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 11 = 0$, mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 36$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{5}$. Cho điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) và điểm N thay đổi trên mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng Δ và đoạn MN nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm M .

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và đáy bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{\frac{6077}{2}u_n + 2^{-n}}{2^n u_n + 6076}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

----- HẾT -----

* Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Lời giải đề thi HSG THPT - Gia Lai 2026

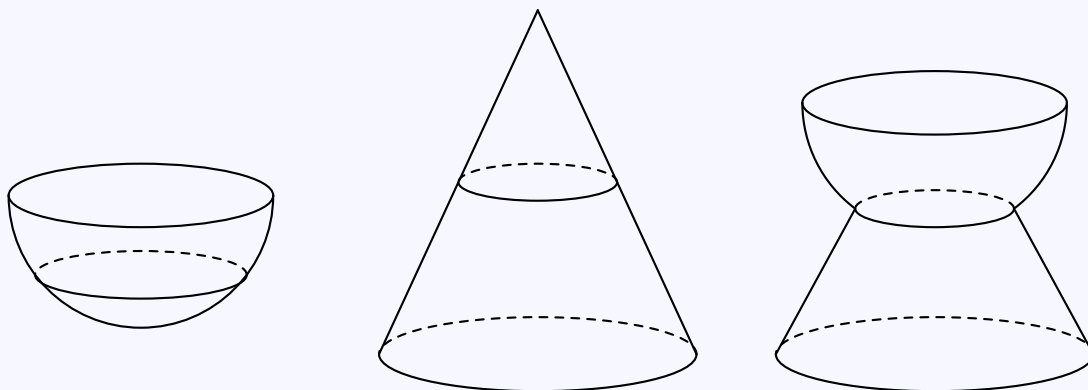
Lê Bình Minh - Chuyên Chu Văn An

Ngày 27 tháng 3 năm 2026

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị A và B thỏa mãn $OA^2 + OB^2 = AB^2 - 8$ (O là gốc tọa độ).

2. Có một nửa khối cầu có bán kính $R_1 = 5$ dm và một khối nón có bán kính đáy $R_2 = 9$ dm, chiều cao $h = 6$ dm. Người ta thiết kế một khối mới bằng cách cắt nửa khối cầu bởi mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa hình tròn lớn của nửa khối cầu và bỏ đi phần chỏm cầu; cắt khối nón bởi mặt phẳng song song với đáy và lấy phần khối nón cụt, sao cho bán kính hình tròn của hai mặt cắt bằng nhau và ghép hai phần đó với nhau tạo thành một khối có tổng chiều cao là 8 dm (tham khảo hình vẽ). Tìm thể tích lớn nhất của khối được tạo thành.



Lời giải

1.

Hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 1$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Để đồ thị có hai điểm cực trị A, B thì phương trình $y' = 0$ hay $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình: $y = -2x - m + 1$

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(x_1; -2x_1 - m + 1)$ và $B(x_2; -2x_2 - m + 1)$

Yêu cầu bài toán: $OA^2 + OB^2 = AB^2 - 8$

Sử dụng công thức độ dài và tích vô hướng:

$$OA^2 + OB^2 = |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 - 8 = OA^2 + OB^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 8$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = -4$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}y_1 y_2 &= (-2x_1 - m + 1)(-2x_2 - m + 1) = 4x_1 x_2 + 2(m - 1)(x_1 + x_2) + (m - 1)^2 \\y_1 y_2 &= 4(m^2 - 1) + 4m(m - 1) + (m - 1)^2 = 9m^2 - 6m - 3\end{aligned}$$

Thay vào phương trình tích vô hướng:

$$\begin{aligned}(m^2 - 1) + (9m^2 - 6m - 3) &= -4 \Leftrightarrow 10m^2 - 6m = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy giá trị cần tìm là $m \in \{0; \frac{3}{5}\}$

2. Gọi r là bán kính của hai mặt cắt ($0 < r \leq 5$)

Xét phần đối cầu: Mặt phẳng cắt nửa khối cầu (bán kính $R_1 = 5$) song song với đáy và cách tâm một khoảng h_1 .

Ta có:

$$h_1 = \sqrt{R_1^2 - r^2} = \sqrt{25 - r^2}$$

Vì phần giữ lại là phần đối cầu chứa tâm (bỏ chỏm cầu) nên chiều cao của phần này chính là h_1 .

Xét phần nón cụt: Khối nón ban đầu có bán kính đáy $R_2 = 9$ và chiều cao $h = 6$

Gọi h_2 là chiều cao của khối nón cụt.

Theo định lý Ta-lét, bán kính r của mặt cắt phía trên thỏa mãn:

$$\frac{r}{R_2} = \frac{h - h_2}{h} \Rightarrow \frac{r}{9} = \frac{6 - h_2}{6} \Rightarrow h_2 = 6 - \frac{2}{3}r$$

Theo giả thiết, tổng chiều cao của khối mới bằng 8 dm, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}h_1 + h_2 &= 8 \Leftrightarrow \sqrt{25 - r^2} + 6 - \frac{2}{3}r = 8 \\&\Leftrightarrow \sqrt{25 - r^2} = 2 + \frac{2}{3}r \quad (1)\end{aligned}$$

Điều kiện: $2 + \frac{2}{3}r \geq 0$ (luôn đúng với $r > 0$). Bình phương hai vế của (1):

$$25 - r^2 = 4 + \frac{8}{3}r + \frac{4}{9}r^2 \Leftrightarrow \frac{13}{9}r^2 + \frac{8}{3}r - 21 = 0$$

Giải phương trình bậc hai trên, ta thu được nghiệm dương duy nhất $r = 3$

Với $r = 3$, ta tính được $h_1 = \sqrt{25 - 3^2} = 4$ và $h_2 = 6 - \frac{2}{3}(3) = 4$

Thể tích khối được tạo thành là $V = V_{\text{đối cầu}} + V_{\text{nón cụt}}$

Trong đó:

$$V_{\text{đối cầu}} = \pi \int_0^{h_1} (R_1^2 - x^2) dx = \pi \left(25h_1 - \frac{h_1^3}{3} \right) = \pi \left(25 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} \right) = \frac{236\pi}{3}$$

$$V_{\text{nón cụt}} = \frac{1}{3}\pi h_2 (R_2^2 + R_2 r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (9^2 + 9 \cdot 3 + 3^2) = \frac{4\pi}{3} \cdot 117 = 156\pi$$

Tổng thể tích khối mới là:

$$V = \frac{236\pi}{3} + 156\pi = \frac{704\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$$

Vì các giá trị r và h được xác định duy nhất từ điều kiện tổng chiều cao nên thể tích lớn nhất cần tìm là $V = \frac{704\pi}{3} \text{ (dm}^3\text{)}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải phương trình:

$$1 - 2 \ln \frac{\sin x + 9}{(\sin x - 3)^2} = \cos 2x + 14 \sin x$$

Lời giảiĐiều kiện: $\sin x \neq 3$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$)

Phương trình tương đương:

$$1 - 2 [\ln(\sin x + 9) - \ln(\sin x - 3)^2] = 1 - 2 \sin^2 x + 14 \sin x$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln(\sin x + 9) + 4 \ln(3 - \sin x) = -2 \sin^2 x + 14 \sin x$$

$$\Leftrightarrow 4 \ln(3 - \sin x) + 2 \sin^2 x - 14 \sin x - 2 \ln(\sin x + 9) = 0$$

Đặt $t = \sin x$ với $t \in [-1; 1]$, xét hàm số $f(t) = 4 \ln(3 - t) + 2t^2 - 14t - 2 \ln(t + 9)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-4}{3-t} + 4t - 14 - \frac{2}{t+9} = \frac{4}{t-3} + (4t-14) - \frac{2}{t+9}$$

Với $t \in [-1; 1]$ thì:

$$t - 3 < 0 \Rightarrow \frac{4}{t-3} < 0$$

$$4t - 14 \leq 4(1) - 14 = -10 < 0$$

$$t + 9 > 0 \Rightarrow -\frac{2}{t+9} < 0$$

Suy ra $f'(t) < 0, \forall t \in [-1; 1]$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$

$$\text{Mặt khác } f(0) = 4 \ln 3 - 2 \ln 9 = 4 \ln 3 - 4 \ln 3 = 0$$

Vậy phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = 0$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3. (5,0 điểm)

1. Có một vòng quay gồm 40 cabin cách đều nhau, các cabin được coi như là các đỉnh của một đa giác đều. Ba bạn An, Bình và Chi lên ngẫu nhiên 3 cabin khác nhau. Tính xác suất để ba bạn lên 3 cabin tạo thành tam giác không cân, không vuông và không có cạnh nào là cạnh của đa giác đều.

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển biểu thức $P(x) = (3 + x - x^2)^n$, với n là số nguyên dương thỏa mãn:

$$2C_n^2 - 3A_n^2 + 144 = 0$$

Lời giải**1. Tính xác suất:**Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{40}^3 = 9880$ Gọi A là tập hợp các tam giác cân, B là tập hợp các tam giác vuông, C là tập hợp các tam giác có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác đềuSố tam giác cân: $n(A) = 40 \times \left(\frac{40-2}{2}\right) = 760$ (không có tam giác đều vì 40 không chia hết cho 3)Số tam giác vuông: $n(B) = 20 \times (40 - 2) = 760$ (cạnh huyền là đường kính)Số tam giác có ít nhất một cạnh của đa giác: $n(C) = C_{40}^3 - \frac{40(40-4)(40-5)}{6} = 9880 - 8400 = 1480$

Sử dụng nguyên lý bù trừ cho các tập hợp:

$$n(A \cap B) = 40 \times 1 = 40 \text{ (tam giác vuông cân tại mỗi đỉnh)}$$

$$n(B \cap C) = 20 \times 4 = 80 \text{ (mỗi đường kính kết hợp với 4 đỉnh kề 2 đầu đường kính)}$$

$$n(C \cap A) = 40 \times 1 = 40 \text{ (tam giác cân có đáy là cạnh đa giác)}$$

$$n(A \cap B \cap C) = 0$$

Số tam giác không thỏa mãn điều kiện đề bài là:

$$n(A \cup B \cup C) = 760 + 760 + 1480 - (40 + 80 + 40) + 0 = 2840$$

Xác suất cần tìm: $P = 1 - \frac{2840}{9880} = \frac{176}{247}$

2. Tìm hệ số x^5

Điều kiện: $n \geq 2$

Phương trình tương đương:

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 3 \cdot n(n-1) + 144 = 0 \Leftrightarrow -2n(n-1) = -144 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

Vì n nguyên dương nên $n = 9$

Khai triển: $P(x) = (3+x-x^2)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 3^{9-k} \cdot (x-x^2)^k = \sum_{k=0}^9 \sum_{j=0}^k C_9^k \cdot C_k^j \cdot 3^{9-k} \cdot x^{k-j} \cdot (-x^2)^j$

Số hạng tổng quát: $C_9^k \cdot C_k^j \cdot 3^{9-k} \cdot (-1)^j \cdot x^{k+j}$

Yêu cầu $k+j=5$ với $0 \leq j \leq k \leq 9$, các cặp (k, j) thỏa mãn:

Trường hợp 1: $j=0, k=5 \Rightarrow C_9^5 \cdot C_5^0 \cdot 3^4 \cdot (-1)^0 = 10206$

Trường hợp 2: $j=1, k=4 \Rightarrow C_9^4 \cdot C_4^1 \cdot 3^5 \cdot (-1)^1 = -122472$

Trường hợp 3: $j=2, k=3 \Rightarrow C_9^3 \cdot C_3^2 \cdot 3^6 \cdot (-1)^2 = 183708$

Hệ số của x^5 là: $10206 - 122472 + 183708 = 71442$

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Trong công viên có một hồ nước, đáy của hồ nằm trong mặt phẳng (α) và các mép trong của thành hồ giao với (α) tạo thành một tam giác ABC . Trong mặt phẳng (α) , chọn hệ trục tọa độ Oxy và tìm được $A(10; 83)$, $B(26; 20)$ và $C(82; 62)$. Người ta muốn cải tạo hồ nước bằng cách xây một đài phun nước có đáy là hình tròn nằm trong (α) sao cho hình tròn này tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC . Hãy xác định tọa độ tâm hình tròn của đài phun nước

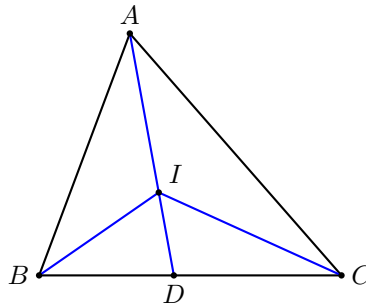
2. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z + 11 = 0$, mặt cầu $(S) : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 36$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{5}$. Cho điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) và điểm N thay đổi trên mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng Δ và đoạn MN nhỏ nhất. Tìm tọa độ điểm M

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và đáy bằng 60° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD)

Lời giải

1.

Bổ đề về tâm tỉ cự của tâm đường tròn nội tiếp



Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh đối diện các đỉnh A, B, C lần lượt là a, b, c . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó ta có:

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

Chứng minh:

Gọi D là chân đường phân giác trong góc A ($D \in BC$)

Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow b\vec{DB} + c\vec{DC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{ID} = \frac{b\vec{IB} + c\vec{IC}}{b+c}$$

Trong tam giác ABD , BI là đường phân giác trong góc B , ta có:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow a\vec{IA} + (b+c)\vec{ID} = \vec{0}$$

Thay biểu thức $\vec{ID}$ vào ta được:

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

Áp dụng giải quyết bài toán

Tâm hình tròn đáy đài phun nước tiếp xúc với ba cạnh tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC

Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC :

$$a = BC = \sqrt{(82 - 26)^2 + (62 - 20)^2} = \sqrt{56^2 + 42^2} = 70$$

$$b = AC = \sqrt{(82 - 10)^2 + (62 - 83)^2} = \sqrt{72^2 + (-21)^2} = 75$$

$$c = AB = \sqrt{(26 - 10)^2 + (20 - 83)^2} = \sqrt{16^2 + (-63)^2} = 65$$

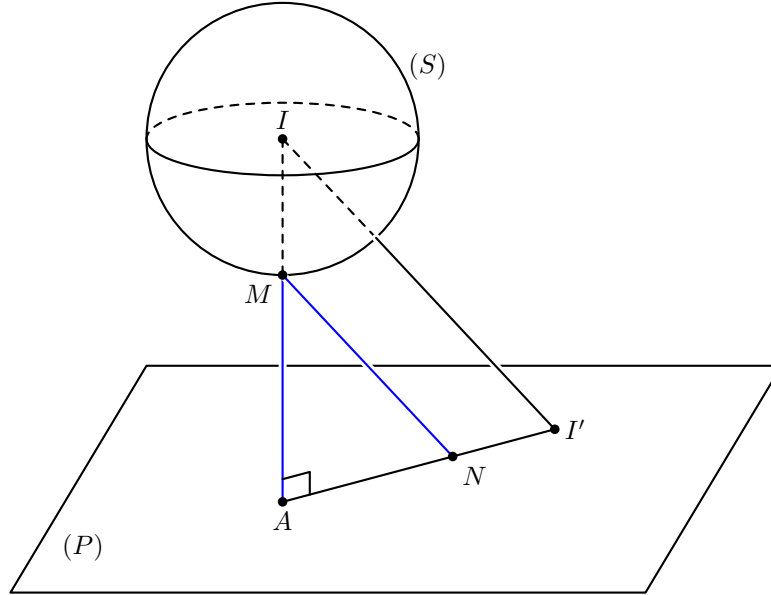
Tọa độ tâm $I(x_I; y_I)$ thỏa mãn:

$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c} = \frac{70 \cdot 10 + 75 \cdot 26 + 65 \cdot 82}{70 + 75 + 65} = \frac{7980}{210} = 38$$

$$y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c} = \frac{70 \cdot 83 + 75 \cdot 20 + 65 \cdot 62}{70 + 75 + 65} = \frac{11340}{210} = 54$$

Vậy tọa độ tâm đài phun nước là $I(38; 54)$

2.



Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 4; -1)$ và bán kính $R = 6$

Gọi I' là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) theo phương Δ , suy ra $II' \parallel \Delta$ nên đường thẳng II' có vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2; -1; 5)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } II' : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Vì $I' \in (P)$ nên $(3 + 2t) + 2(4 - t) + 2(-1 + 5t) + 11 = 0 \Leftrightarrow 10t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

Suy ra tọa độ $I'(-1; 6; -11)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song MN và II'

Mặt phẳng (Q) cắt (P) theo giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm N và I'

Trong (Q) , kéo dài IM cắt NI' tại A , do $N \in (P)$ và $I' \in (P)$ nên A chính là giao điểm của IM và mặt phẳng (P) , rõ ràng A, N, I' thẳng hàng theo thứ tự đó

Vì $M \in (S)$ nên để đoạn MN ngắn nhất, M phải nằm giữa I và A (nằm ở bán cầu gần mặt phẳng (P) hơn),

khi đó $AI = AM + MI = AM + 6$

Áp dụng định lý Thales trong $\triangle AII'$ có $MN \parallel II'$:

$$\frac{MN}{II'} = \frac{AM}{AI} = \frac{AM}{AM+6} \Rightarrow MN = II' \cdot \left(1 - \frac{6}{AM+6}\right)$$

Vì độ dài II' không đổi, để MN đạt giá trị nhỏ nhất thì biểu thức $\frac{6}{AM+6}$ phải lớn nhất, tương đương với đoạn AM đạt giá trị nhỏ nhất

Điều này xảy ra khi và chỉ khi A là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P)

Đường thẳng d đi qua I vuông góc với (P) có vectơ chỉ phương $\vec{n}_P = (1; 2; 2)$, phương trình d :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 4 + 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

Tọa độ điểm A thỏa mãn: $(3 + k) + 2(4 + 2k) + 2(-1 + 2k) + 11 = 0 \Leftrightarrow 9k + 20 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{20}{9}$

Suy ra $A\left(\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{49}{9}\right)$

Khoảng cách $IA = d(I, (P)) = \frac{20}{3}$, do M nằm giữa I và A nên $\vec{IM} = \frac{IM}{IA}\vec{IA} = \frac{6}{20/3}\vec{IA} = \frac{9}{10}\vec{IA}$

Ta có $\vec{IA} = \left(-\frac{20}{9}; -\frac{40}{9}; -\frac{40}{9}\right)$, suy ra $\vec{IM} = (-2; -4; -4)$

Tọa độ điểm $M = I + \vec{IM} = (3 - 2; 4 - 4; -1 - 4) = (1; 0; -5)$

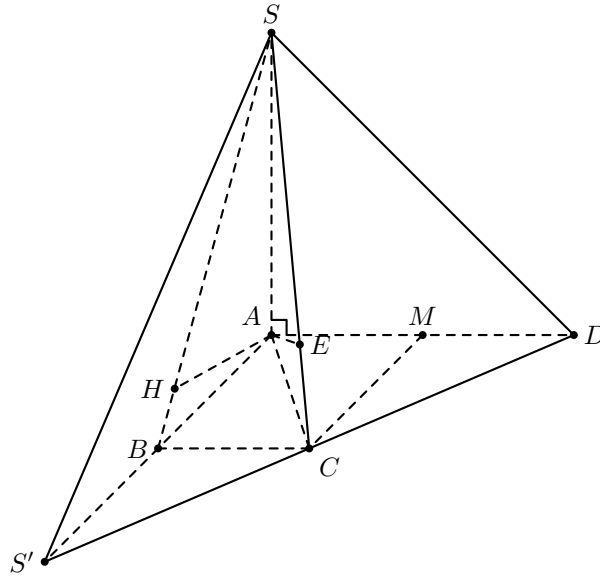
Để tìm N , ta tiếp tục dùng định lý Thales: $\frac{AN}{AI'} = \frac{AM}{AI} = \frac{20/3-6}{20/3} = \frac{1}{10} \Rightarrow \vec{AN} = \frac{1}{10}\vec{AI'}$

Với $\vec{AI'} = \left(-\frac{16}{9}; \frac{58}{9}; -\frac{50}{9}\right)$, suy ra $\vec{AN} = \left(-\frac{8}{45}; \frac{29}{45}; -\frac{5}{9}\right)$

Tọa độ điểm $N = A + \vec{AN} = \left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -6\right)$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $M(1; 0; -5)$ và $N\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -6\right)$

3.



Xét hình thang vuông $ABCD$, ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Gọi M là trung điểm của AD , suy ra $AM = MD = a$ và $ABCM$ là hình vuông

Do đó $CM = a$, xét $\triangle ACD$ có đường trung tuyến $CM = \frac{1}{2}AD$

Vậy $\triangle ACD$ vuông tại C

Suy ra $AC \perp CD$

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$

Từ đó ta có $CD \perp (SAC)$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ chính là góc giữa SC và AC , tức là $\widehat{SCA} = 60^\circ$

Xét tam giác vuông SAC , ta có $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{6}$
 Xét tam giác vuông SAB , ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{6a^2 + a^2} = a\sqrt{7}$
 Vì $AH \perp SB$ nên $SH \cdot SB = SA^2$, suy ra tỉ lệ $\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{6a^2}{7a^2} = \frac{6}{7}$

Kéo dài CD cắt AB tại S'

Ta có $BC \parallel AD$ và $BC = \frac{1}{2}AD$ nên theo định lý Thales, B là trung điểm của AS'

Suy ra $d(B, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD))$

Mặt khác, do đường thẳng SB cắt mặt phẳng (SCD) tại S nên $d(H, (SCD)) = \frac{SH}{SB}d(B, (SCD))$

Thay tỉ số vào ta được $d(H, (SCD)) = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{3}{7}d(A, (SCD))$

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $AE \perp SC$ tại E

Vì $CD \perp (SAC)$ nên $CD \perp AE$, kết hợp với $AE \perp SC$ suy ra $AE \perp (SCD)$

Do đó khoảng cách từ A đến (SCD) chính là độ dài đoạn AE

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC , ta có:

$$AE = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{6a^2 + 2a^2}} = \frac{a^2\sqrt{12}}{a\sqrt{8}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Cuối cùng, khoảng cách từ H đến (SCD) là:

$$d(H, (SCD)) = \frac{3}{7}AE = \frac{3}{7} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a\sqrt{6}}{14}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{\frac{6077}{2}u_n + 2^{-n}}{2^n u_n + 6076}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

Lời giải

Đặt $v_n = 2^n u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$

Từ công thức truy hồi ta nhân 2^{n+1} cho hai vế và rút gọn: $v_{n+1} = \frac{6077v_n + 2}{v_n + 6076} \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lần lượt trừ 2; -1 cho hai vế ta thu được

$$v_{n+1} - 2 = \frac{6075(v_n - 2)}{v_n + 6076} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$v_{n+1} + 1 = \frac{6078(v_n + 1)}{v_n + 6076} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(Ở đâu ra 2 số này thì bạn hãy thử cho $v_n = v_{n+1} = x$ và giải phương trình, người ta gọi đó là điểm bất động)

Chia hai đẳng thức vế theo vế (Nhớ chứng minh v_n không thể nhận giá trị 2; -1 để phép chia hợp lệ)

$$\frac{v_{n+1} - 2}{v_{n+1} + 1} = \frac{6075}{6078} \cdot \frac{v_n - 2}{v_n + 1} = \frac{2025}{2026} \cdot \frac{v_n - 2}{v_n + 1}$$

Đặt $x_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1}$, suy ra (x_n) là cấp số nhân với công bội $q = \frac{2025}{2026}$

$$\text{Số hạng đầu: } x_1 = \frac{v_1 - 2}{v_1 + 1} = \frac{2^1 u_1 - 2}{2^1 u_1 + 1} = \frac{4 - 2}{4 + 1} = \frac{2}{5}$$

Số hạng tổng quát của dãy (x_n) :

$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2025}{2026}\right)^{n-1}$$

Từ $x_n = \frac{v_n-2}{v_n+1}$ ta rút ra v_n :

$$x_n v_n + x_n = v_n - 2 \Leftrightarrow v_n(1 - x_n) = x_n + 2 \Leftrightarrow v_n = \frac{2 + x_n}{1 - x_n}$$

Thay biểu thức của x_n vào ta có:

$$v_n = \frac{2 + \frac{2}{5} \left(\frac{2025}{2026} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{5} \left(\frac{2025}{2026} \right)^{n-1}} = \frac{10 \cdot 2026^{n-1} + 2 \cdot 2025^{n-1}}{5 \cdot 2026^{n-1} - 2 \cdot 2025^{n-1}}$$

Mà $u_n = \frac{v_n}{2^n}$, vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là:

$$u_n = \frac{5 \cdot 2026^{n-1} + 2025^{n-1}}{2^{n-1} (5 \cdot 2026^{n-1} - 2 \cdot 2025^{n-1})} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

— HẾT —

** Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay*