

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Ngày thi: 04/3/2026

(Đề thi gồm 02 trang)

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Một bệnh nhân được tiêm thuốc đặc trị định kỳ mỗi 24 giờ một liều 200 mg. Sau mỗi 24 giờ, lượng thuốc còn lại bằng 60% lượng thuốc có trong cơ thể sau lần tiêm trước đó.

a) Tính lượng thuốc trong cơ thể của bệnh nhân này ngay sau khi tiêm liều thứ 5.

b) Biết ngưỡng ngộ độc thuốc là 500 mg. Hỏi nếu điều trị hàng ngày theo phương án này thì bệnh nhân có thời điểm nào bị ngộ độc hay không?

2. Một công ty có 3 chi nhánh và tại mỗi chi nhánh có 10 bậc lương cho nhân viên. Lương của nhân viên được thể hiện trong bảng dưới đây, biết rằng trong mỗi hàng, các số tạo thành một cấp số cộng (theo thứ tự từ trái sang phải), và trong mỗi cột, các số tạo thành một cấp số nhân (theo thứ tự từ trên xuống dưới). Chứng minh rằng công bội của tất cả các cấp số nhân này đều bằng nhau.

Chi nhánh Bậc lương	BẮC	TRUNG	NAM
1			
2			
3			
...			
10			

Câu 2. (4,0 điểm)

$$\text{Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} x(x+3)^2+1 & \text{khi } -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{x+7}{x+3} & \text{khi } x < -4 \\ 2^x - x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

a) Hỏi hàm số này có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

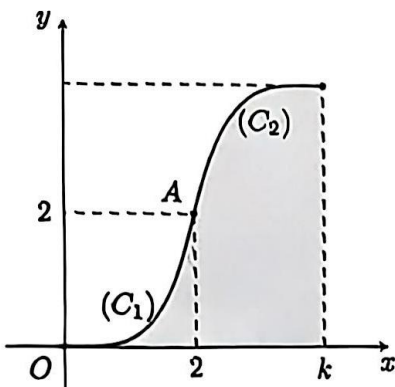
b) Giả sử có 6 số thực $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ sao cho

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = f(a_5) = f(a_6).$$

Chứng minh rằng $a_6 - a_5 < 1$.

Câu 3. (4,0 điểm)

Một công ty thiết kế logo dựa trên một hình phẳng (H) giới hạn bởi các trục tọa độ, đường thẳng $x = k$ và đường cong (C) như hình vẽ. Đường cong (C) gồm hai đường cong: (C_1) là một phần đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4, 0 \leq x \leq 2$ và (C_2) là một phần đồ thị của hàm số $g(x) = b(x-k)^4 + c, 2 \leq x \leq k$.



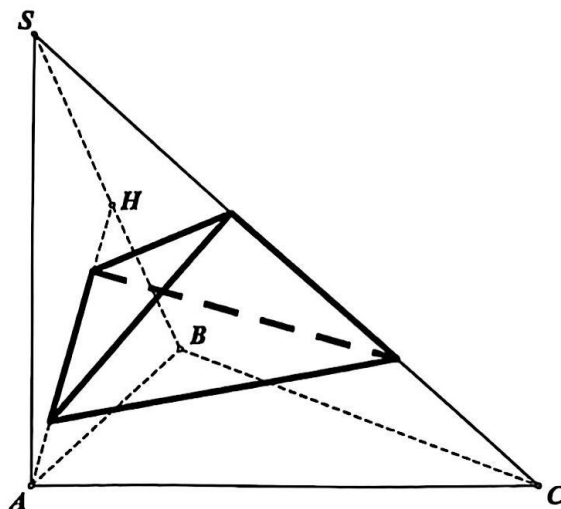
Biết rằng (C_1) và (C_2) có chung một tiếp tuyến tại điểm $A(2;2)$ và diện tích của hình phẳng (H) bằng 8 (đvdt).
Tính giá trị của tham số k .

Câu 4. (4,0 điểm)

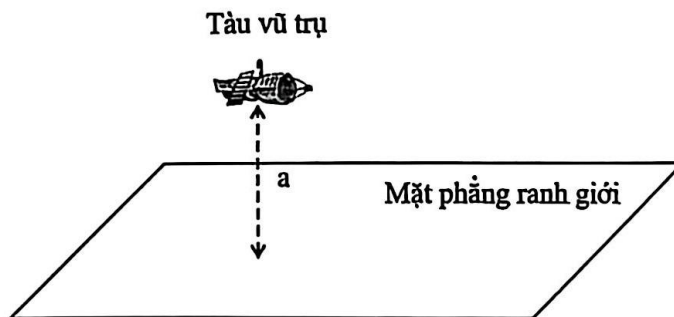
1. Tại buổi triển lãm, một viên đá quý được trưng bày trên giá đỡ có dạng hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC cân tại B nằm trên mặt bàn và SA vuông góc với mặt bàn. Viên đá quý có hình dạng một khối tứ diện đều có hai cạnh đối lần lượt nằm trên hai đường thẳng chứa cạnh SC và đường cao AH của tam giác SAB như hình vẽ. Biết $AB = 5\text{ cm}$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.

b) Tính thể tích của viên đá quý.



2. Một tàu vũ trụ đang ở cách mặt phẳng ranh giới giữa hai nửa không gian một khoảng bằng a . Phi hành đoàn biết điều đó nhưng không chắc chắn phải đi theo hướng nào để chạm đến ranh giới. Tàu vũ trụ có thể di chuyển trong không gian theo bất kỳ đường đi nào, đồng thời ghi lại độ dài quãng đường đã đi chuyển và tàu có thiết bị cảm biến báo hiệu khi đã đến ranh giới. Liệu phi hành đoàn có thể chắc chắn đến được mặt phẳng ranh giới hay không, với điều kiện quãng đường đi chuyển không quá $14a$?



Câu 5. (4,0 điểm)

Cho X là tập hợp gồm 45 số nguyên từ -22 đến 22 . Chọn ngẫu nhiên $a, b, c \in X$ để tạo

thành hàm số $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$ có đồ thị (C) .

a) Tính xác suất để đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận.

b) Tính xác suất để đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận cắt nhau tại điểm nằm trên trục hoành.

--- HẾT ---

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP
THÀNH PHỐ

NĂM HỌC 2025 - 2026

MÔN: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(File đáp án có 15 trang)

(Đáp án chỉ mang tính chất tham khảo)

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Lời giải và Latex: Hà Duyên Hải Anh

Câu 1. (4,0 điểm)

Một bệnh nhân được tiêm thuốc đặc trị định kỳ mỗi 24 giờ một liều 200 mg. Sau mỗi 24 giờ, lượng thuốc còn lại bằng 60% lượng thuốc có trong cơ thể sau lần tiêm trước đó.

- a) Tính lượng thuốc trong cơ thể của bệnh nhân này ngay sau khi tiêm liều thứ 5.
- b) Biết ngưỡng ngộ độc thuốc là 500 mg. Hỏi nếu điều trị hàng ngày theo phương án này thì bệnh nhân có thời điểm nào bị ngộ độc hay không?

Lời giải.

Gọi u_n (mg) là lượng thuốc trong cơ thể ngay sau lần tiêm thứ n ($n \geq 1$).

Khi đó

$$u_1 = 200, \quad u_n = 0,6u_{n-1} + 200 \quad (n \geq 2).$$

Đặt $v_n = u_n - 500$ Ta có

$$v_n = u_n - 500 = 0,6u_{n-1} + 200 - 500 = 0,6u_{n-1} - 300 = 0,6(u_{n-1} - 500) = 0,6v_{n-1}.$$

Vậy (v_n) là một cấp số nhân với

$$v_1 = u_1 - 500 = 200 - 500 = -300, \quad q = 0,6.$$

Suy ra

$$v_n = -300(0,6)^{n-1}.$$

Do đó

$$u_n = v_n + 500 = 500 - 300(0,6)^{n-1}.$$

- a) Ngay sau khi tiêm liều thứ 5:

$$u_5 = 500 - 300(0,6)^4 = 500 - 300 \cdot 0,1296 = 461,12.$$

Vậy lượng thuốc là

$$\boxed{461,12 \text{ mg}}.$$

b) Vì $(0,6)^{n-1} > 0$ với mọi $n \geq 1$, nên

$$u_n = 500 - 300(0,6)^{n-1} < 500.$$

Vậy ngay sau mỗi lần tiêm, lượng thuốc luôn nhỏ hơn 500 mg.

Giữa hai lần tiêm, lượng thuốc chỉ giảm dần nên cũng không thể vượt quá 500 mg.

Do đó bệnh nhân **không bao giờ bị ngộ độc**.

Kết luận:

$$u_5 = 461,12 \text{ mg}$$

và

bệnh nhân không bị ngộ độc.

2. Một công ty có 3 chi nhánh và tại mỗi chi nhánh có 10 bậc lương cho nhân viên. Lương của nhân viên được thể hiện trong bảng dưới đây, biết rằng trong mỗi hàng, các số tạo thành một cấp số cộng (theo thứ tự từ trái sang phải), và trong mỗi cột, các số tạo thành một cấp số nhân (theo thứ tự từ trên xuống dưới). Chứng minh rằng công bội của tất cả các cấp số nhân này đều bằng nhau.

Chi nhánh Bậc lương	BẮC	TRUNG	NAM
1			
2			
3			
...			
10			

Lời giải.

Gọi các số trong bảng là $a_{i,j}$ với $i = 1, \dots, 10$ (bậc lương) và $j = 1, 2, 3$ (Bắc, Trung, Nam).

Vì mỗi hàng là cấp số cộng nên với mọi i ta có:

$$a_{i,2} - a_{i,1} = a_{i,3} - a_{i,2}.$$

Đặt công sai của hàng i là d_i , khi đó:

$$a_{i,2} = a_{i,1} + d_i, \quad a_{i,3} = a_{i,1} + 2d_i.$$

Vì mỗi cột là cấp số nhân, đặt công bội của cột j là q_j ($j = 1, 2, 3$), ta có với mọi $i = 1, \dots, 9$:

$$a_{i+1,1} = q_1 a_{i,1}, \quad a_{i+1,2} = q_2 a_{i,2}, \quad a_{i+1,3} = q_3 a_{i,3}.$$

Xét hai hàng liên tiếp i và $i + 1$. Từ $a_{i,2} = a_{i,1} + d_i$ suy ra:

$$a_{i+1,2} - a_{i+1,1} = q_2 a_{i,2} - q_1 a_{i,1} = q_2(a_{i,1} + d_i) - q_1 a_{i,1} = (q_2 - q_1)a_{i,1} + q_2 d_i.$$

Mặt khác, vì hàng $i + 1$ là cấp số cộng nên:

$$a_{i+1,2} - a_{i+1,1} = d_{i+1}.$$

Do đó:

$$d_{i+1} = (q_2 - q_1)a_{i,1} + q_2 d_i. \quad (1)$$

Tương tự, từ $a_{i,3} = a_{i,2} + d_i$ suy ra:

$$a_{i+1,3} - a_{i+1,2} = q_3 a_{i,3} - q_2 a_{i,2} = q_3(a_{i,2} + d_i) - q_2 a_{i,2} = (q_3 - q_2)a_{i,2} + q_3 d_i.$$

Mà hàng $i + 1$ là cấp số cộng nên cũng có:

$$a_{i+1,3} - a_{i+1,2} = d_{i+1}.$$

Suy ra:

$$d_{i+1} = (q_3 - q_2)a_{i,2} + q_3 d_i. \quad (2)$$

Thay $a_{i,2} = a_{i,1} + d_i$ vào (2), được:

$$d_{i+1} = (q_3 - q_2)(a_{i,1} + d_i) + q_3 d_i = (q_3 - q_2)a_{i,1} + (2q_3 - q_2)d_i. \quad (3)$$

Vì (1) và (3) đều bằng d_{i+1} với mọi i , nên so sánh hệ số theo $a_{i,1}$ và d_i ta được:

$$q_2 - q_1 = q_3 - q_2 \quad \text{và} \quad q_2 = 2q_3 - q_2.$$

Từ phương trình thứ hai:

$$2q_2 = 2q_3 \Rightarrow q_2 = q_3.$$

Thế vào phương trình thứ nhất:

$$q_2 - q_1 = q_3 - q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2.$$

Vậy:

$$q_1 = q_2 = q_3.$$

Kết luận: công bội của các cấp số nhân ở mọi cột đều bằng nhau.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x(x+3)^2 + 1 & \text{khi } -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{x+7}{x+3} & \text{khi } x < -4 \\ 2^x - x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

- a) Hỏi hàm số này có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?
- b) Giả sử có 6 số thực $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ sao cho

$$f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = f(a_5) = f(a_6).$$

Chứng minh rằng $a_6 - a_5 < 1$.

Lời giải.

- a) Xét từng khoảng:

Với $x < -4$:

$$f(x) = \frac{x+7}{x+3} = 1 + \frac{4}{x+3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{(x+3)^2} < 0.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty, -4)$, không có cực trị trong khoảng này.

Với $-4 \leq x \leq 0$:

$$f(x) = x(x+3)^2 + 1, \quad f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3).$$

Ta có bảng biến thiên:

x	-4	-3	-1	0		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Do đó:

$x = -3$ là điểm cực đại; $x = -1$ là điểm cực tiểu.

Xét tại $x = -4$:

$$f(-4) = \frac{-4+7}{-4+3} = -3.$$

Vì khi $x \rightarrow -4^-$ (bên trái -4) hàm số nghịch biến và khi $x \in (-4^+; -3)$ thì hàm số đồng biến nên $x = -4$ là điểm cực tiểu. Vậy $x = -4$ là điểm cực tiểu.

Xét tại $x = 0$:

$$f(0) = 1.$$

Ta thấy khi $x \in (-1, 0)$ thì hàm số đồng biến

Mặt khác, với $x > 0$:

$$f(x) = 2^x - x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 - 1.$$

Ta có $f'(0^+) = \ln 2 - 1 < 0$, nên phía bên phải của $x = 0$ hay $x \rightarrow x_0^+$ thì hàm số nghịch biến

Do đó, $x = 0$ là điểm cực đại.

Trên $(0, +\infty)$, phương trình:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0$$

có đúng một nghiệm:

$$x_0 = \log_2 \frac{1}{\ln 2}.$$

Vì $f'(x) < 0$ khi $0 < x < x_0$ và $f'(x) > 0$ khi $x > x_0$, nên $x = x_0$ là điểm cực tiểu.

Vậy hàm số có tất cả

5 điểm cực trị.

b) Đặt

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_6) = m.$$

Trên khoảng $x < -4$, hàm số nghịch biến nên đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị nhiều nhất 1 điểm.

Trên đoạn $[-4, 0]$, hàm tăng trên $[-4, -3]$, giảm trên $[-3, -1]$, rồi tăng trên $[-1, 0]$, nên $y = m$ cắt phần này nhiều nhất 3 điểm.

Vậy ở phần $x \leq 0$, tổng cộng nhiều nhất có 4 nghiệm. Do có 6 nghiệm phân biệt nên bắt buộc còn 2 nghiệm dương. Vì thế

$$a_5 > 0, \quad a_6 > 0,$$

và

$$2^{a_5} - a_5 = 2^{a_6} - a_6.$$

Ta sẽ chứng minh $a_6 - a_5 < 1$.

Giả sử ngược lại:

$$a_6 - a_5 \geq 1.$$

Khi đó đặt:

$$d = a_6 - a_5 \geq 1.$$

Ta có:

$$2^{a_6} - a_6 - (2^{a_5} - a_5) = 2^{a_5}(2^d - 1) - d.$$

Xét hàm:

$$\varphi(d) = 2^{a_5}(2^d - 1) - d \quad (d \geq 1).$$

Khi đó:

$$\varphi'(d) = 2^{a_5} 2^d \ln 2 - 1.$$

Vì $a_5 > 0$ và $d \geq 1$ nên:

$$\varphi'(d) \geq 2 \ln 2 - 1 > 0.$$

Suy ra: $\varphi(d)$ tăng trên $[1, +\infty)$, nên:

$$\varphi(d) \geq \varphi(1) = 2^{a_5} - 1 > 0.$$

Do đó:

$$2^{a_6} - a_6 > 2^{a_5} - a_5,$$

mâu thuẫn với:

$$2^{a_6} - a_6 = 2^{a_5} - a_5.$$

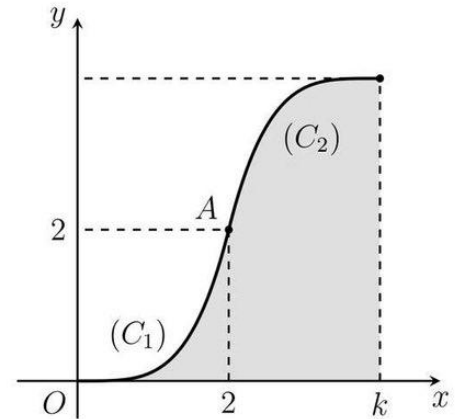
Vậy giả sử trên là sai, suy ra:

$$a_6 - a_5 < 1.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

Một công ty thiết kế logo dựa trên một hình phẳng (H) giới hạn bởi các trục tọa độ, đường thẳng $x = k$ và đường cong (C) như hình vẽ. Đường cong (C) gồm hai đường cong: (C_1) là một phần đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4, 0 \leq x \leq 2$ và (C_2) là một phần đồ thị của hàm số $g(x) = b(x - k)^4 + c, 2 \leq x \leq k$.

Biết rằng (C_1) và (C_2) có chung một tiếp tuyến tại điểm $A(2; 2)$ và diện tích của hình phẳng (H) bằng 8 (đvdt). Tính giá trị của tham số k .



Lời giải.

Vì $A(2; 2) \in (C_1)$ nên:

$$f(2) = 2 \Rightarrow a \cdot 2^4 = 2 \Rightarrow 16a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}.$$

Do đó:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^3.$$

Suy ra:

$$f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4.$$

Vì (C_1) và (C_2) có chung tiếp tuyến tại $A(2; 2)$ nên $g(2) = 2, \quad g'(2) = 4.$

Ta có:

$$g(x) = b(x - k)^4 + c \Rightarrow g'(x) = 4b(x - k)^3.$$

Từ $g'(2) = 4$ suy ra:

$$4b(2-k)^3 = 4 \Rightarrow b(2-k)^3 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(2-k)^3}.$$

Từ $g(2) = 2$ suy ra:

$$b(2-k)^4 + c = 2.$$

Mà: $b(2-k)^4 = \frac{(2-k)^4}{(2-k)^3} = 2-k$, nên: $2-k+c=2 \Rightarrow c=k$.

Vậy

$$g(x) = \frac{1}{(2-k)^3}(x-k)^4 + k.$$

Diện tích hình phẳng (H) là

$$S = \int_0^2 \frac{1}{8}x^4 dx + \int_2^k \left(\frac{1}{(2-k)^3}(x-k)^4 + k \right) dx = \frac{4}{5} - \frac{(2-k)^2}{5} + k(k-2) = 8.$$

Xét phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} - \frac{(2-k)^2}{5} + k(k-2) &= 8 \\ \Leftrightarrow 4 - (2-k)^2 + 5k(k-2) &= 4 \\ \Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-4)(2k+5) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $k > 2$ nên

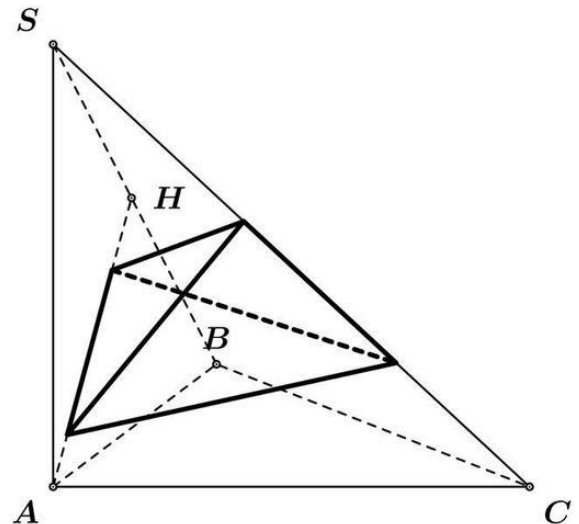
$$\boxed{k = 4}.$$

Vậy giá trị cần tìm là

$$\boxed{4}.$$

Câu 4. (4,0 điểm)

1. Tại buổi triển lãm, một viên đá quý được trưng bày trên giá đỡ có dạng hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC cân tại B nằm trên mặt bàn và SA vuông góc với mặt bàn. Viên đá quý có hình dạng một khối tứ diện đều có hai cạnh đối lần lượt nằm trên hai đường thẳng chứa cạnh SC và đường cao AH của tam giác SAB như hình vẽ. Biết $AB = 5$ cm, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .



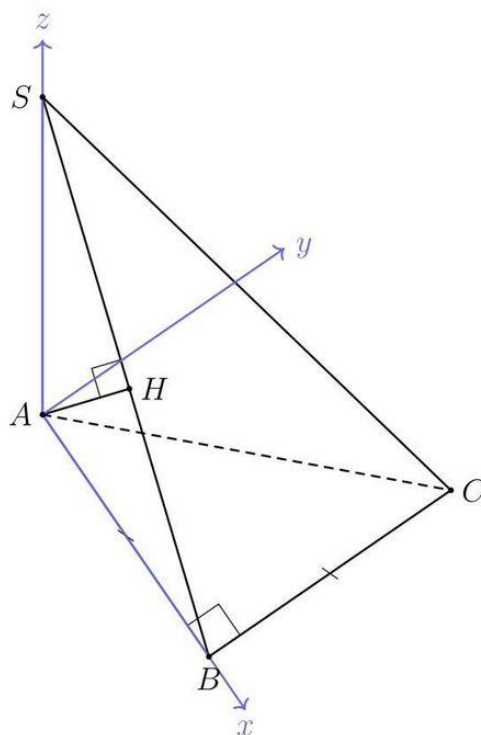
a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.

b) Tính thể tích của viên đá quý.

Lời giải.

a) Ta có:

Gắn trục tọa độ như hình vẽ:



a) Chọn mặt phẳng đáy (ABC) là mặt phẳng $z = 0$. vì $AB = 5$ nên Đặt

$$A(0, 0, 0), \quad S(0, 0, h) \quad (h = SA), \quad B(5, 0, 0)$$

Do tam giác ABC cân tại B , đặt:

$$C(x, y, 0).$$

Khi đó:

$$BC = BA = 5 \Rightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 25. \quad (1)$$

Trong tam giác SAB , do $SA \perp AB$ nên $AH \perp SB$.

Ta có:

$$\overrightarrow{SB} = (5, 0, -h).$$

Một vectơ vuông góc với $\overrightarrow{SB}$ là:

$$\vec{u} = (h, 0, 5)$$

vì

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{SB} = 5h - 5h = 0.$$

Vậy có thể chọn vectơ chỉ phương của AH là:

$$\vec{u} = (h, 0, 5).$$

Vì hai cạnh đối của tứ diện đều vuông góc nhau nên:

$$SC \perp AH.$$

Ta có:

$$\vec{SC} = (x, y, -h).$$

Do đó"

$$\vec{SC} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow xh + y \cdot 0 + (-h) \cdot 5 = 0 \Rightarrow h(x - 5) = 0.$$

Vì $h \neq 0$, suy ra:

$$x = 5.$$

Thế vào (1), được

$$y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5. :$$

Theo hình vẽ, chọn:

$$C(5, 5, 0) \Rightarrow \vec{BA}(5; 0; 0), \quad \vec{BC}(0; 5; 0) \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$$

Do đó: $BA \perp BC$, mà tam giác ABC cân tại B nên **tam giác ABC vuông cân tại B.**

b) Xét góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) , ta có:

$$\vec{SA} = (0, 0, -h), \quad \vec{SC} = (5, 5, -h).$$

Suy ra một vectơ pháp tuyến của (SAC) là

$$\vec{n}_1 = \vec{SA} \times \vec{SC} = (5h, -5h, 0).$$

Mặt khác:

$$\vec{SB} = (5, 0, -h), \quad \vec{SC} = (5, 5, -h),$$

Nên một vectơ pháp tuyến của (SBC) là:

$$\vec{n}_2 = \vec{SB} \times \vec{SC} = (5h, 0, 25).$$

Vì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° , nên:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Do đó

$$\frac{1}{2} = \frac{|(5h, -5h, 0) \cdot (5h, 0, 25)|}{(5h\sqrt{2}) \cdot 5\sqrt{h^2 + 25}} = \frac{25h^2}{25h\sqrt{2}\sqrt{h^2 + 25}} = \frac{h}{\sqrt{2}\sqrt{h^2 + 25}}.$$

Suy ra

$$\frac{h}{\sqrt{2}\sqrt{h^2 + 25}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2h = \sqrt{2}\sqrt{h^2 + 25} \Rightarrow h^2 = 25.$$

Vì $h > 0$, nên

$$SA = h = 5.$$

Khi đó tam giác SAB vuông cân tại A , nên

$$SB = 5\sqrt{2}.$$

Suy ra đường cao từ A xuống SB là

$$AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{5 \cdot 5}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Lại có $\overrightarrow{AH} // (5, 0, 5)$, đặt

$$\overrightarrow{AH} = k(5, 0, 5).$$

Khi đó

$$AH^2 = 50k^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right).$$

Ta có

$$\overrightarrow{SC} = (5, 5, -5), \quad \overrightarrow{AS} = (0, 0, 5).$$

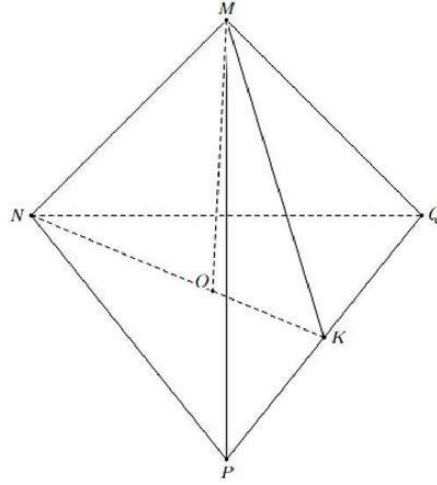
Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AH là:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{AH})|}{\|\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{AH}\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Gọi a là cạnh của tứ diện đều. Ta chứng minh:

Với tứ diện đều, khoảng cách giữa hai cạnh đối bằng: $\frac{a}{\sqrt{2}}$ và thể tích tứ diện bằng: $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Thật vậy, xét tứ diện đều $M.NPQ$ có các cạnh bằng a :



Gọi K là trung điểm PQ , O là trọng tâm của tam giác NPQ .

Đặt $d = d(MN, PQ)$, ta có:

$$d(PQ, MN) = d(K, MN) = \frac{3}{2}d(O, MN).$$

Xét tam giác đều NPQ có:

$$NK = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow NO = \frac{2}{3}NK = \frac{\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow MO = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

Mặt khác:

$$d(O, MN) = \frac{MO \cdot NO}{\sqrt{MO^2 + NO^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{3} \Rightarrow d(PQ, MN) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra:

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{2}d.$$

Ta lại có:

$$V_{M.NPQ} = \frac{1}{3}S_{NPQ} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

Áp dụng bài toán ta có, giả sử viên kim cương tứ diện đều có cạnh bằng a .

Suy ra:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = d = \frac{5}{\sqrt{6}} \Rightarrow a = \sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Thể tích tứ diện đều cạnh a là

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Vậy

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{125\sqrt{6}}{108} \text{ cm}^3.$$

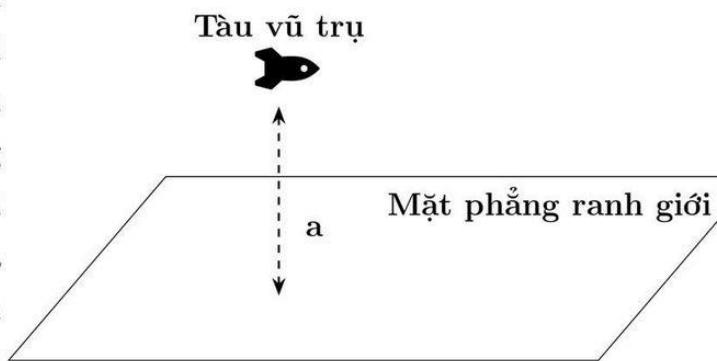
Vậy

$\triangle ABC$ vuông cân tại B

và

$$V = \frac{125\sqrt{6}}{108} \text{ cm}^3 \approx 2,84 \text{ cm}^3.$$

2. Một tàu vũ trụ đang ở cách mặt phẳng ranh giới giữa hai nửa không gian một khoảng bằng a . Phi hành đoàn biết điều đó nhưng không chắc chắn phải đi theo hướng nào để chạm đến ranh giới. Tàu vũ trụ có thể di chuyển trong không gian theo bất kỳ đường đi nào, đồng thời ghi lại độ dài quãng đường đã di chuyển và tàu có thiết bị cảm biến báo hiệu khi đã đến ranh giới. Liệu phi hành đoàn có thể chắc chắn đến được mặt phẳng ranh giới hay không, với điều kiện quãng đường di chuyển không quá $14a$?

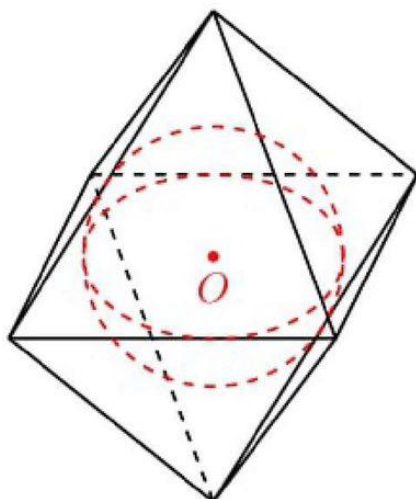


Lời giải.

Gọi O là vị trí ban đầu của tàu.

Vì mặt phẳng ranh giới cách O một khoảng đúng bằng a , nên nó luôn là một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tâm O , bán kính a .

Ta dựng một bát diện đều có tâm O và mặt cầu nội tiếp chính là mặt cầu đó. Khi đó khoảng cách từ O đến mỗi mặt của bát diện đều bằng a . (Hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa)



Gọi s là cạnh bát diện đều. Ta có bán kính mặt cầu nội tiếp của bát diện đều là

$$r = \frac{\sqrt{6}}{6} s.$$

Do $r = a$, suy ra

$$s = a\sqrt{6}.$$

Khoảng cách từ tâm O đến mỗi đỉnh của bát diện đều là

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{6} = a\sqrt{3}.$$

Ta cho tàu bay như sau:

- Từ O bay thẳng đến một đỉnh của bát diện: quãng đường là $a\sqrt{3}$.
- Sau đó bay dọc theo 5 cạnh liên tiếp để đi qua cả 6 đỉnh của bát diện: quãng đường là $5a\sqrt{6}$.

Vậy tổng quãng đường là

$$S = a\sqrt{3} + 5a\sqrt{6} \approx 1,732a + 12,247a = 13,979a < 14a..$$

Bây giờ ta chứng minh cách đi này luôn gặp mặt phẳng ranh giới.

Vì mặt phẳng ranh giới tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp nên nó sẽ cắt khối bát diện thành hai phần, do đó trong 6 đỉnh của bát diện luôn có đỉnh nằm ở hai phía khác nhau của mặt phẳng.

Mà tàu đi liên tiếp qua tất cả 6 đỉnh, nên sẽ có ít nhất một đoạn bay nối hai đỉnh nằm khác phía. Khi đó đoạn thẳng ấy chắc chắn cắt mặt phẳng ranh giới.

Vì thế tàu chắc chắn chạm được mặt phẳng ranh giới.

Kết luận: phi hành đoàn có thể chắc chắn đến được mặt phẳng ranh giới với quãng đường không vượt quá $14a$.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho X là tập hợp gồm 45 số nguyên từ -22 đến 22 . Chọn ngẫu nhiên $a, b, c \in X$ để tạo thành hàm số $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$ có đồ thị (C) .

- Tính xác suất để đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận.
- Tính xác suất để đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận cắt nhau tại điểm nằm trên trục hoành.

Lời giải.

Không gian mẫu là số bộ ba có thứ tự (a, b, c) với $a, b, c \in X$:

$$n(\Omega) = 45^3 = 91125.$$

- Đồ thị của

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

có 2 tiệm cận khi mẫu $x - c$ không bị khử, tức là

$$c \neq a, \quad c \neq b.$$

Khi đó:

- chọn c : có 45 cách;
- chọn $a \neq c$: có 44 cách;
- chọn $b \neq c$: có 44 cách.

Số trường hợp thuận lợi là

$$45 \cdot 44 \cdot 44.$$

Vậy xác suất cần tìm là

$$P = \frac{45 \cdot 44 \cdot 44}{45^3} = \frac{1936}{2025}.$$

b) Khi $c \neq a$, $c \neq b$, chia đa thức ta được

$$f(x) = x - a - b + c + \frac{(c - a)(c - b)}{x - c}.$$

Vì thế hai tiệm cận là

$$x = c \quad \text{và} \quad y = x - a - b + c.$$

Giao điểm của chúng là

$$I(c, 2c - a - b).$$

Để I nằm trên trục hoành thì tung độ bằng 0, tức là

$$2c - a - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a + b}{2}.$$

Như vậy $a + b$ phải chẵn, tức là a, b cùng tính chẵn lẻ.

Trong tập X có:

$$23 \text{ số chẵn}, \quad 22 \text{ số lẻ}.$$

Do $c = \frac{a + b}{2}$ và $c \neq a$, $c \neq b$ nên phải có $a \neq b$.

Số cặp có thứ tự (a, b) cùng tính chẵn lẻ và khác nhau là

$$23 \cdot 22 + 22 \cdot 21 = 968.$$

Với mỗi cặp như vậy, giá trị

$$c = \frac{a + b}{2}$$

được xác định duy nhất và vẫn thuộc X .

Vậy số trường hợp thuận lợi là 968, nên xác suất là

$$P = \frac{968}{91125}.$$

Kết luận:

$$\boxed{P_a = \frac{1936}{2025}}, \quad \boxed{P_b = \frac{968}{91125}}.$$

———— HẾT ————