



Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} a_0 = 2027 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Xét dãy số (b_n) xác định bởi: $b_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{a_i + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tìm tất cả các số tự nhiên m sao cho tồn

tại $n \in \mathbb{N}$ để $[b_n] = m$ (trong đó, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Câu 2. (4,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương n biết rằng: Tồn tại các đa thức $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ với hệ số nguyên, khác hằng (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) Đa thức $g(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$;

ii) $\prod_{i=1}^n (f_i(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , G là điểm chính giữa cung BC chứa A . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Các đường thẳng GB, GC cắt EF tương ứng tại P, Q .

a) Chứng minh rằng bốn điểm F, D, M, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường tròn nội tiếp (J) của tam giác GPQ tiếp xúc với PQ tại H . Gọi N là trung điểm GH .

Chứng minh rằng JN song song với IG .

Câu 4. (4,0 điểm) Tìm tất cả các số chính phương trong dãy số $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, \forall n \geq 1$.

Câu 5. (4,0 điểm) Trong bảng $n \times n$ ô vuông xếp 661 quân domino sao cho mỗi quân domino phủ kín đúng 2 ô vuông 2×1 hoặc 1×2 , ngoài ra hai quân domino bất kỳ không chạm nhau (không có điểm chung kể cả ở cạnh hay đỉnh). Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

CHỌN HSG CHUYÊN TRẦN PHÚ – HẢI PHÒNG

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Chuyên Trần Phú - P1)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} a_0 = 2027 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- ① Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- ② Xét dãy số (b_n) xác định bởi: $b_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{a_i + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tìm tất cả các số tự nhiên m sao cho tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $[b_n] = m$ (trong đó, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

✍ Lời giải.

- ① Để ý $a_n > 0$ với mọi số tự nhiên n .

Mặt khác, $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{a_n + 1} = \frac{a_n}{a_n + 1} > 0$ với mọi n nên dãy (a_n) giảm ngặt.

Vì (a_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \geq 0$.

Cho $n \rightarrow \infty$ trong hệ thức truy hồi, ta được $L = \frac{L^2}{L + 1}$.

Suy ra $L(L + 1) = L^2$, hay $L = 0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- ② Từ đẳng thức ở trên, với mọi $i \in \mathbb{N}$ ta có $\frac{a_i}{a_i + 1} = a_i - a_{i+1}$.

Vì thế với mọi n thì $b_n = \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_{n+1} = 2027 - a_{n+1}$.

Do $a_{n+1} > 0$ nên $b_n < 2027$ với mọi n . Hơn thế nữa $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2027$ do $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Ngoài ra $b_{n+1} - b_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + 1}$ nên $0 < b_{n+1} - b_n < 1$.

Trước hết, $b_0 = \frac{2027}{2028} \in (0, 1)$ nên $[b_0] = 0$.

Xét một số nguyên $m \in \{1, 2, \dots, 2026\}$. Vì $b_n \rightarrow 2027 > m$ nên tồn tại n sao cho $b_n \geq m$.

Gọi n là chỉ số nhỏ nhất có tính chất đó. Khi ấy $b_{n-1} < m \leq b_n$.

Mặt khác, $b_n = b_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) < b_{n-1} + 1 < m + 1$.

Do đó $m \leq b_n < m + 1$ suy ra $[b_n] = m$.

Ngược lại, vì $0 < b_n < 2027$ nên $[b_n]$ chỉ có thể thuộc tập $\{0, 1, \dots, 2026\}$.

Vậy tất cả số tự nhiên m thỏa mãn là $m \in \{0, 1, \dots, 2026\}$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Chuyên Trần Phú - P2)

Tìm tất cả các số nguyên dương n biết rằng: Tồn tại các đa thức $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ với hệ số nguyên, khác hằng (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- ◇ Đa thức $g(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$;
- ◇ $\prod_{i=1}^n (f_i(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

** Lời giải.**

Ta sẽ chứng minh rằng các số nguyên dương n thỏa mãn bài toán là các số lẻ.

1 Chứng minh n là số lẻ:

Đầu tiên ta có $g(i) = 0$ với i là số phức thỏa mãn $i^2 = -1$.

Vì $\prod_{j=1}^n (f_j(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và hai vế là đa thức nên điều này cũng đúng với mọi $x \in \mathbb{C}$.

Thay $x = i$, ta có $\prod_{j=1}^n (f_j(i)^2 - 1) = -1$.

Với $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, đặt $f_j(i) = z_j \in \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Với mỗi số phức $z = a + bi$, xét $N(z) = a^2 + b^2$ là chuẩn của z .

Khi đó $\prod_{j=1}^n (z_j^2 - 1) = -1$ nên $\prod_{j=1}^n N(z_j^2 - 1) = N(-1) = 1$.

Vì $z_j \in \mathbb{Z}[i]$ nên $N(z_j^2 - 1)$ là số nguyên dương hay $N(z_j^2 - 1) = 1$ với $j = 1, 2, \dots, n$.

Khi đó $z_j^2 - 1 \in \{1, -1, i, -i\}$, xét từng trường hợp và để ý $N(z_j^2) = N(z_j)^2$ là số chính phương để suy ra $z_j = 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$.

Vì vậy $-1 = \prod_{j=1}^n (z_j^2 - 1) = (-1)^n$ nên n là số lẻ.

2 Chứng minh n lẻ thỏa mãn:

Ta có đẳng thức: $(4t^3 - 3t)^2 - 1 = (t^2 - 1)((2t)^2 - 1)^2$.

Xét dãy đa thức $(P_k)_{k \geq 0}$ được xác định bởi $P_0(x) = x^2 + 1$ và

$$P_{k+1}(x) = 4P_k(x)^3 - 3P_k(x) \quad \forall k \geq 0.$$

Thay $t = P_k(x)$, ta được:

$$P_{k+1}(x)^2 - 1 = (P_k(x)^2 - 1)((2P_k(x))^2 - 1)^2.$$

Vì n là số lẻ nên tồn tại số nguyên dương m sao cho $n = 2m + 1$.

Đặt $g(x) = P_m(x)$, $f_1(x) = P_0(x) = x^2 + 1$ và với mỗi $k = 0, 1, \dots, m - 1$, đặt:

$$f_{2k+2}(x) = f_{2k+3}(x) = 2P_k(x).$$

Khi đó, áp dụng liên tiếp đẳng thức phía trên, ta có:

$$g(x)^2 - 1 = P_m(x)^2 - 1 = (P_0(x)^2 - 1) \prod_{k=0}^{m-1} ((2P_k(x))^2 - 1)^2 = \prod_{j=1}^n (f_j(x)^2 - 1).$$

Mặt khác, $P_0(i) = 0$. Nếu $P_k(i) = 0$ thì $P_{k+1}(i) = 4P_k(i)^3 - 3P_k(i) = 0$.

Do đó, theo quy nạp, $P_k(i) = 0$ với mọi $k \geq 0$ nên $g(i) = 0$ hay $g(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Vậy với mọi số lẻ n , tồn tại các đa thức khác hằng $f_1, f_2, \dots, f_n, g \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn:

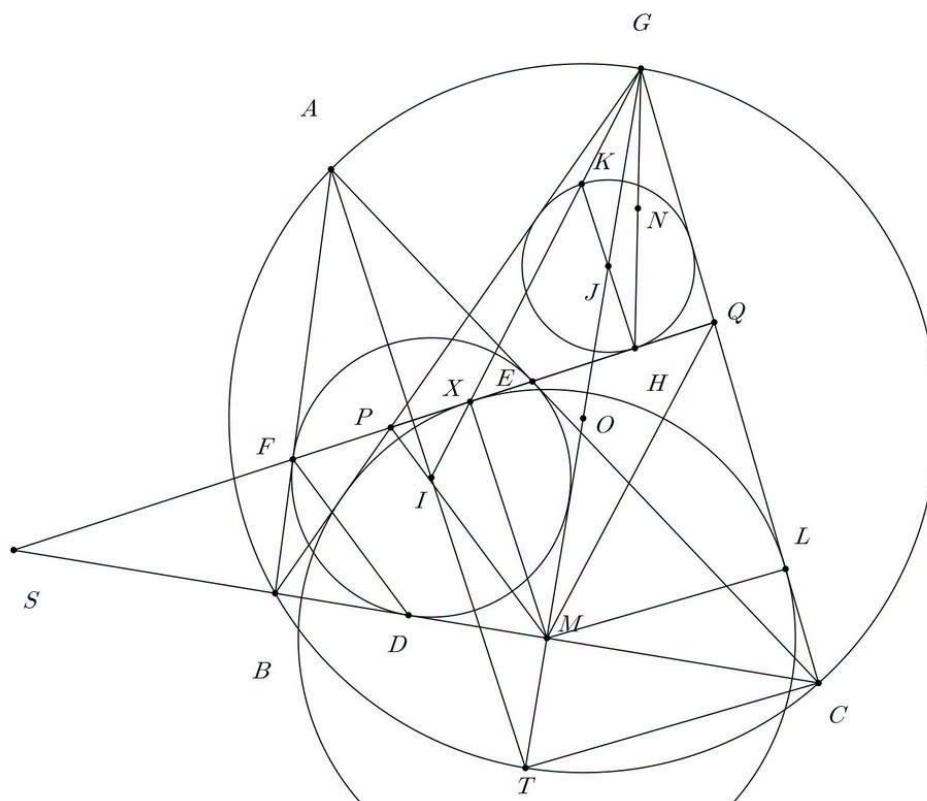
$$\prod_{j=1}^n (f_j(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1 \quad \text{và} \quad g(i) = 0.$$

Vậy tất cả số nguyên dương n cần tìm là các số lẻ.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Chuyên Trần Phú - P3)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , G là điểm chính giữa cung BC chứa A . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Các đường thẳng GB, GC cắt EF tương ứng tại P, Q .

- ① Chứng minh rằng bốn điểm F, D, M, Q cùng thuộc một đường tròn.
- ② Đường tròn nội tiếp (J) của tam giác GPQ tiếp xúc với PQ tại H . Gọi N là trung điểm GH . Chứng minh rằng JN song song với IG .



Lời giải.

- ① Gọi EF cắt BC tại S . Để ý rằng: $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$ (do $BF = BD, AF = AE, EC = CD$).

Vì thế: AD, BE, CF đồng quy (theo định lý Ceva đảo).

Áp dụng hàng điểm điều hòa cơ bản thì: $(SD, BC) = -1$ do đó theo hệ thức Maclaurin thì:

$$SD \cdot SM = SB \cdot SC$$

Ta có tam giác GBC đồng dạng tam giác AEF (g.g) do đó: $\angle AFQ = \angle QCB$ suy ra: $FQCB$ nội tiếp suy ra: $SF \cdot SQ = SB \cdot SC = SD \cdot SM$ suy ra: F, D, M, Q cùng thuộc một đường tròn.

② Lấy K đối xứng H qua J . Ta có một tính chất quen thuộc sau của mô hình đường tròn nội tiếp (các bạn tự chứng minh lại): GK đi qua tiếp điểm bàng tiếp góc G của tam giác GPQ và $GK \parallel JN$.

Tương tự ý đầu ta chứng minh được: P, E, M, D cùng thuộc một đường tròn.

Do đó: $\angle EPM = \angle EDC = 90^\circ - C/2$.

Lại có: $\angle EPB = \angle EFB + \angle ABG = \angle A + 90^\circ - A/2 + B/2 - C/2 = 180^\circ - \angle C = 2\angle MPE$ suy ra: MP là phân giác góc BPQ hay M là tâm bàng góc G của tam giác GPQ .

Gọi X là hình chiếu của M lên PQ . Ta có: $GX \parallel JN$. Do đó ta cần chỉ ra rằng: I, X, G thẳng hàng.

Lấy L là hình chiếu của M lên GC và T đối xứng G qua O .

Ta có: $\frac{GM}{GT} = \frac{ML}{TC} = \frac{MX}{TI}$ suy ra: tam giác GMX đồng dạng tam giác GTI (c.g.c) suy ra: G, X, I thẳng hàng. Vậy ta có: $JN \parallel IG$.

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Chuyên Trần Phú - P4)

Tìm tất cả các số chính phương trong dãy số $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} \forall n \geq 1$.

Lời giải.

Để ý $x_0 = 1$ là một số chính phương trong dãy trên.

Ta sẽ chứng minh không còn số chính phương nào khác, thật vậy giả sử phản chứng.

Gọi n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều này. Khi đó $x_n \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$.

Để ý $x_n \equiv 1 \pmod{5}$ nếu $n \equiv 0 \pmod{3}$ và $x_n \equiv 2 \pmod{5}$ nếu $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$.

Do đó n phải chia hết cho 3, từ đó tồn tại m nguyên dương để $n = 3m$.

Đặt $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ và $\beta = 2 - \sqrt{3}$ thì $\alpha\beta = 1$ và $x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}$ với mọi n . Khi đó

$$x_{3m} = \frac{\alpha^{3m} + \beta^{3m}}{2} = \frac{(\alpha^m + \beta^m)^3 - 3\alpha^m\beta^m(\alpha^m + \beta^m)}{2} = 4x_m^3 - 3x_m$$

Để ý thêm $x_n \equiv 1 \pmod{3}$ với n chẵn và $x_n \equiv 2 \pmod{3}$ với n lẻ nên x_n không chia hết cho 3 với mọi n .

Từ đó $\gcd(x_m, 4x_m^3 - 3x_m) = \gcd(x_m, 3) = 1$.

Mà $x_{3m} = x_m(4x_m^2 - 3)$ và x_{3m} là số chính phương nên x_m là số chính phương, vô lý vì $3m = n$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn x_n là số chính phương.

Vì vậy không tồn tại số nguyên dương n để x_n là số chính phương, do đó số chính phương duy nhất trong dãy là $x_0 = 1$

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Chuyên Trần Phú - P5)

Trong bảng $n \times n$ ô vuông xếp 661 quân dominô sao cho mỗi quân dominô phủ kín đúng 2 ô vuông 2×1 hoặc 1×2 , ngoài ra hai quân dominô bất kỳ không chạm nhau (không có điểm chung kể cả ở cạnh hay đỉnh). Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Ta gọi các giao điểm của các đường kẻ trong bảng là các **đỉnh lưới**.

Bảng $n \times n$ có tất cả $(n+1)^2$ đỉnh lưới.

Mỗi quân dominô phủ một hình chữ nhật kích thước 1×2 , do đó chứa đúng 6 đỉnh lưới.

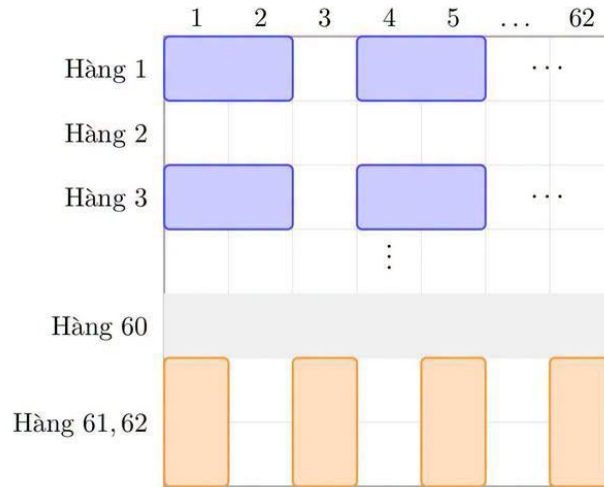
Vì hai quân dominô bất kỳ không có điểm chung (kể cả ở đỉnh), nên 6 đỉnh lưới thuộc hai quân khác

nhau cũng đôi một phân biệt. Bởi vậy, nếu xếp được 661 quân thì:

$$6 \cdot 661 \leq (n+1)^2.$$

Từ đây suy ra được $n+1 \geq 63$ hay $n \geq 62$.

Để chỉ ra $n = 62$ thoả mãn, ta xếp như sau:



Trên mỗi hàng thuộc tập hợp $\{1, 3, 5, \dots, 59\}$, ta đặt các quân domino nằm ngang phủ các cặp cột:

$$(1, 2), (4, 5), (7, 8), \dots, (61, 62)$$

Có 30 hàng được chọn và trên mỗi hàng có 21 quân, nên ta đặt được 630 quân domino.

Trên hai hàng 61 và 62, ta đặt 31 quân domino thẳng đứng tại các cột: 1, 3, 5, ..., 61.

Cách sắp xếp trên cho ta 661 quân domino, do đó giá trị nhỏ nhất của n bằng 62.

Kết luận: $n_{\min} = 62$