

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $10x^3 - 17x^2 - 7x + 2 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2(x + y) = 0 \\ \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{y^2 + 4y + 3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

c) Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m nguyên

đương để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $C = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Câu 3. (1,0 điểm)

a) Bạn Hoa có một cái khoá số gồm 4 chữ số lấy từ các chữ số từ 0 đến 9. Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên một dãy gồm 4 chữ số để đặt làm mã số mở khoá. Tính xác suất của biến cố A: “4 chữ số được chọn liên tiếp nhau và tăng dần”.

b) Bến Tre (nay là tỉnh Vĩnh Long) là vùng đất nổi tiếng với những vườn dừa xanh tốt và nghề làm kẹo dừa truyền thống. Nghề làm kẹo dừa Bến Tre không chỉ góp phần giữ gìn bản sắc văn hóa địa phương mà còn tạo ra sản phẩm đặc trưng phục vụ du lịch, lễ Tết, hội nghị và xuất khẩu.

Một hộp đựng kẹo dừa Bến Tre có dạng hình hộp chữ nhật, chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 5 cm. Hộp đựng 40 viên kẹo dừa giống nhau được xếp thành 5 hàng theo chiều dài, 4 hàng theo chiều rộng và 2 lớp theo chiều cao (mỗi viên kẹo dừa là một hình hộp chữ nhật), được xếp sát nhau và vừa khít trong hộp. Người ta gói từng viên kẹo bằng một loại giấy đặc biệt, phần giấy gói vừa khít viên kẹo. Hãy tính diện tích giấy gói mỗi viên kẹo.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O với M là một điểm bên trong đường tròn. Vẽ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại M (hai dây cung AB và CD không là đường kính, C thuộc cung nhỏ AB). Qua A kẻ đường thẳng vuông góc BC tại H và cắt đường thẳng DC tại E . Gọi F là điểm đối xứng của C qua AB , tia AF cắt BD tại K , N là giao điểm BF với AD . Chứng minh:

a) $\triangle AFM$ đồng dạng $\triangle DFK$ và BN vuông góc với AD ;

b) Ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Câu 5. (1,5 điểm)

a) Tìm tổng của tất cả các số nguyên dương x sao cho $A = \frac{x^3 - 4x + 120}{(x - 2)(x + 2)}$ là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 4(x + 2)$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho 2 số thực $a > 2, b > 2$. Chứng minh rằng $\frac{16a^2}{a - 2} + \frac{5b^2}{b - 2} \geq 168$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Bài tập 1 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 1)

- ① Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- ② Rút gọn biểu thức $B = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

Lời giải.

- ① Ta có $\sqrt{2}A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} + 1| = -2$.
Vì vậy $A = -\sqrt{2}$.
- ② Ta có: $B = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28 - (\sqrt{x} - 4)^2 - (\sqrt{x} + 8)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 1)}$

$$= \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 1)} = \sqrt{x} - 1.$$
Vì vậy $B = \sqrt{x} - 1$.

Bài tập 2 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 2)

- ① Giải phương trình $10x^3 - 17x^2 - 7x + 2 = 0$.
- ② Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + 2(x + y) = 0 \\ \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{y^2 + 4y + 3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
- ③ Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m nguyên dương để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $C = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Lời giải.

- ① Ta có $(x - 2)(5x - 1)(2x + 1) = 0$ nên $x \in \left\{2, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right\}$.
- ② Điều kiện xác định: $x \neq -1, -3$ và $y \neq -1, -3$.
 Từ phương trình thứ nhất ta có $(x + 2)(y + 2) = 4$.
 Đặt $u = x + 2, v = y + 2$ thì $uv = 4$ và hệ trở thành

$$\begin{cases} uv = 4, \\ \frac{1}{u^2 - 1} + \frac{1}{v^2 - 1} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Thay $v = \frac{4}{u}$, ta được $\frac{1}{u^2 - 1} + \frac{1}{\frac{16}{u^2} - 1} = \frac{2}{3}$.

Khi đó $\frac{u^4 - 2u^2 + 16}{(u^2 - 1)(16 - u^2)} = \frac{2}{3}$ hay $5u^4 - 40u^2 + 80 = 0$.

Từ đó $(u^2 - 4)^2 = 0$ hay $u = 2$ hoặc $u = -2$.

Nếu $u = 2$ thì $v = 2$, suy ra $x = 0, y = 0$.

Nếu $u = -2$ thì $v = -2$, suy ra $x = -4, y = -4$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x, y) = (0, 0), (-4, -4)$.

3 Ta có $\Delta' = m^2 - 4m + 6 = (m - 2)^2 + 2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo Viète ta có $x_1 + x_2 = 2(m - 1)$ và $x_1 x_2 = 2m - 5$.

Để ý $x_1 x_2 \neq 0$, do đó $m \neq \frac{5}{2}$. Ta có $C = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}\right)^2 - 2$.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 12m + 14$. Đặt $P = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$:

$$P = \frac{4m^2 - 12m + 14}{2m - 5} = 2m - 1 + \frac{9}{2m - 5}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow P \in \mathbb{Q}$. Để $C = P^2 - 2 \in \mathbb{Z}$ thì bắt buộc $P \in \mathbb{Z}$ hay:

$$(2m - 5) \in U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$$

Giải ra các giá trị m nguyên dương: $m \in \{1; 2; 3; 4; 7\}$.

Thử lại suy ra tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \{1; 2; 3; 4; 7\}$.

Bài tập 3 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 3)

- ① Bạn Hoa có một cái khoá số gồm 4 chữ số lấy từ các chữ số từ 0 đến 9. Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên một dãy gồm 4 chữ số để đặt làm mã số mở khoá. Tính xác suất của biến cố A: “4 chữ số được chọn liên tiếp nhau và tăng dần”.
- ② Bến Tre (nay là tỉnh Vĩnh Long) là vùng đất nổi tiếng với những vườn dừa xanh tốt và nghề làm kẹo dừa truyền thống. Nghề làm kẹo dừa Bến Tre không chỉ góp phần giữ gìn bản sắc văn hóa địa phương mà còn tạo ra sản phẩm đặc trưng phục vụ du lịch, lễ Tết, hội nghị và xuất khẩu.

Một hộp đựng kẹo dừa Bến Tre có dạng hình hộp chữ nhật, chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 5 cm. Hộp đựng 40 viên kẹo dừa giống nhau được xếp thành 5 hàng theo chiều dài, 4 hàng theo chiều rộng và 2 lớp theo chiều cao (mỗi viên kẹo dừa là một hình hộp chữ nhật), được xếp sát nhau và vừa khít trong hộp. Người ta gói từng viên kẹo bằng một loại giấy đặc biệt, phần giấy gói vừa khít viên kẹo. Hãy tính diện tích giấy gói mỗi viên kẹo.

** Lời giải.**

- ① Số phần tử của không gian mẫu Ω là:

$$n(\Omega) = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

Biến cố A: “4 chữ số được chọn liên tiếp nhau và tăng dần”.

Các dãy số thỏa mãn là: {0123; 1234; 2345; 3456; 4567; 5678; 6789}.

Do đó, số kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = 7$. Xác suất của biến cố A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{10000} = 0,0007$$

Vậy xác suất cần tìm là 0,0007.

- ② Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao mỗi viên kẹo lần lượt là d, r, h (cm).

Vì các viên kẹo xếp sát nhau và vừa khít trong hộp nên:

$$d = \frac{20}{5} = 4 \text{ cm}, \quad r = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ cm}, \quad h = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Diện tích giấy gói mỗi viên kẹo bằng diện tích toàn phần của một viên kẹo:

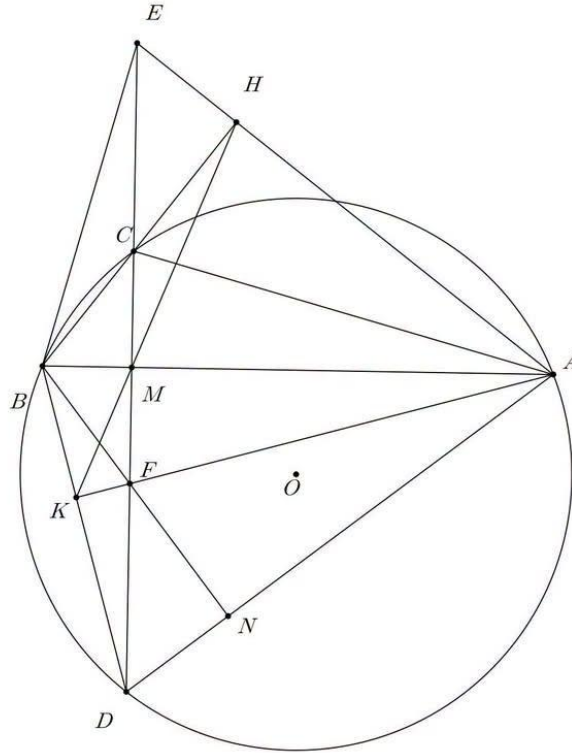
$$S = 2(d \cdot r + r \cdot h + h \cdot d) = 2(4 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 4) = 52,5 \text{ cm}^2$$

Vậy diện tích giấy gói mỗi viên kẹo là $52,5 \text{ cm}^2$.

Bài tập 4 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 4)

Cho đường tròn tâm O với M là một điểm bên trong đường tròn. Vẽ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại M (hai dây cung AB và CD không là đường kính, C thuộc cung nhỏ AB). Qua A kẻ đường thẳng vuông góc BC tại H và cắt đường thẳng DC tại E . Gọi F là điểm đối xứng của C qua AB , tia AF cắt BD tại K , N là giao điểm BF với AD . Chứng minh:

- ① $\triangle AFM$ đồng dạng $\triangle DFK$ và BN vuông góc với AD ;
- ② Ba điểm H, M, K thẳng hàng.



Lời giải.

- ① Ta có: C là trực tâm ABE . Ta có: $\widehat{CBA} = \widehat{MCA} = 90^\circ - \widehat{CAB} = \widehat{EBA}$ suy ra: BE là tam giác cân tại B suy ra: $\widehat{KDF} = \widehat{MEB} = \widehat{CAB} = \widehat{FAM}$ suy ra: $\triangle AFM \sim \triangle DFK$ (g.g). Do đó: $\widehat{FKD} = \widehat{FMA} = 90^\circ$ suy ra: F là trực tâm ABD . Suy ra: $BF \perp AD$ hay $BN \perp AD$.
- ② Ta có: $DKMA, EHMB$ là các tứ giác nội tiếp suy ra: $\widehat{BMK} = \widehat{BDA} = \widehat{BEA} = \widehat{HMA}$ suy ra: H, M, K thẳng hàng.

Bài tập 5 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 5)

- ① Tìm tổng của tất cả các số nguyên dương x sao cho $A = \frac{x^3 - 4x + 120}{(x - 2)(x + 2)}$ là số nguyên.
- ② Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 4(x + 2)$.

Lời giải.

- ① Điều kiện xác định: $x \neq 2$ (vì $x > 0$ nên $x \neq -2$ hiển nhiên thỏa mãn). Ta có:

$$A = \frac{x^3 - 4x + 120}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 120}{x^2 - 4} = x + \frac{120}{x^2 - 4}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{120}{x^2 - 4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x^2 - 4)$ là ước của 120. Vì $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 4 \geq -3$.

Ta kiểm tra các giá trị của $x^2 - 4$ là ước của 120 và lớn hơn hoặc bằng -3 sao cho x^2 là một số chính phương:

- ◇ $x^2 - 4 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ (Thỏa mãn).
- ◇ $x^2 - 4 = 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ (Thỏa mãn).
- ◇ $x^2 - 4 = 12 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ (Thỏa mãn).
- ◇ $x^2 - 4 = 60 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (Thỏa mãn).

Vậy các số nguyên dương x thỏa mãn là $x \in \{1; 3; 4; 8\}$.

Tổng các giá trị của x là: $T = 1 + 3 + 4 + 8 = 16$.

- ② Biến đổi phương trình về dạng phương trình bậc hai theo biến x :

$$x^2 - 2(y + 2)x + 2y^2 - 8 = 0 \quad (*)$$

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\Delta'_x \geq 0$:

$$\Delta'_x = (y + 2)^2 - (2y^2 - 8) = -y^2 + 4y + 12$$

$$\Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 6)(y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 6$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$, kiểm tra các giá trị của $y \in [-2, 6]$ sao cho Δ'_x là số chính phương:

- ◇ $y = -2 \Rightarrow \Delta'_x = 0 = 0^2 \Rightarrow x = 0$.
- ◇ $y = 2 \Rightarrow \Delta'_x = 16 = 4^2 \Rightarrow x = 8$ hoặc $x = 0$.
- ◇ $y = 6 \Rightarrow \Delta'_x = 0 = 0^2 \Rightarrow x = 8$.

Vậy tất cả các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ cần tìm là:

$$(x; y) \in \{(0; -2); (0; 2); (8; 2); (8; 6)\}$$

Bài tập 6 (Lim Olympic - Vĩnh Long - Bài 6)

Cho 2 số thực $a > 2, b > 2$. Chứng minh rằng $\frac{16a^2}{a-2} + \frac{5b^2}{b-2} \geq 168$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lời giải.

Đặt $x = a - 2 > 0$ và $y = b - 2 > 0$.

Khi đó $\frac{16a^2}{a-2} = \frac{16(x+2)^2}{x} = 16x + 64 + \frac{64}{x} \geq 64 + 64 = 128$.

Cũng có $\frac{5b^2}{b-2} = \frac{5(y+2)^2}{y} = 5y + 20 + \frac{20}{y} \geq 20 + 20 = 40$.

Do đó $\frac{16a^2}{a-2} + \frac{5b^2}{b-2} \geq 168$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $16x = \frac{64}{x}$ và $5y = \frac{20}{y}$, tức $x = y = 2$ hay $a = b = 4$.