

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (MÔN CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

**Câu 1. (1,5 điểm)**

Cho biểu thức  $Q = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ , với  $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$ .

a) Rút gọn biểu thức  $Q$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $Q$  khi  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$ .

**Câu 2. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x+2$ .

b) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (m+3)x - 3m$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = 5$ .

**Câu 3. (2,0 điểm)**

a) Trong một trò chơi, An gieo một con xúc xắc 6 mặt cân đối và đồng chất hai lần. Lần thứ nhất An gieo được mặt  $a$  chấm, lần thứ hai An gieo được mặt  $b$  chấm. An sẽ thắng trong trò chơi nếu hai số  $a, b$  thỏa mãn đa thức  $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 6$  chia hết cho đa thức  $(x-2)$ . Tính xác suất để An thắng trong trò chơi.

b) Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình  $(x+y)^2 = x+2$ .

**Câu 4. (2,5 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nhọn nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ , các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ .

a) Chứng minh tứ giác  $BCEF$  nội tiếp và  $AB \cdot AF = AC \cdot AE$ .

b) Đường thẳng qua  $O$  vuông góc với  $AO$  và cắt  $AB, AC$  tương ứng tại  $P, Q$ .

Chứng minh  $PQ$  song song với  $EF$ .

c) Giả sử  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Chứng minh rằng chu vi tam giác  $HPQ$  bằng đường kính của đường tròn  $(O)$ .

**Câu 5. (2,0 điểm)**

a) Một người thợ muốn xây một hồ cá thủy sinh bằng xi măng có dạng hình hộp chữ nhật (không có nắp) có đáy là hình vuông. Yêu cầu đặt ra là thể tích lòng hồ cá phải chứa đúng  $4 \text{ m}^3$  nước. Để tổng diện tích bề mặt bên trong (gồm một mặt đáy và bốn mặt bên) nhỏ nhất, người thợ cần thiết kế độ dài cạnh đáy và chiều cao của lòng hồ cá bằng bao nhiêu mét?

b) Một robot được lập trình di chuyển dọc theo trục tọa độ  $Ox$ . Ban đầu robot đứng ở điểm gốc tọa độ  $O$  (có tọa độ bằng 0). Robot thực hiện liên tiếp 2026 bước di chuyển. Ở bước di chuyển thứ  $k$  (với  $k = 1; 2; \dots; 2026$ ), robot có thể tiến về phía trước hoặc lùi về phía sau một khoảng có độ dài đúng bằng  $k$ . Hỏi sau 2026 bước di chuyển, robot có thể quay trở lại đúng điểm gốc tọa độ  $O$  được không? Vì sao?

----- **HẾT** -----

*Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ CẦN THƠ

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT – ĐỀ CHÍNH THỨC

Kỳ thi tuyển sinh THPT – Năm học 2026–2027 (khóa ngày 29/6/2026)

MÔN: TOÁN (MÔN CHUYÊN) • Thời gian: 150 phút

### Câu 1 (1,5 điểm)

Đặt  $t = \sqrt{x}$  ( $t > 0$ ,  $t \neq 1$ ,  $t \neq 2$ ). Khi đó

$$Q = \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) : \left( \frac{t+1}{t-2} - \frac{t+2}{t-1} \right).$$

a) Tử của phép chia:  $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} = \frac{t - (t-1)}{t(t-1)} = \frac{1}{t(t-1)}.$

Mẫu của phép chia:

$$\frac{t+1}{t-2} - \frac{t+2}{t-1} = \frac{(t+1)(t-1) - (t+2)(t-2)}{(t-2)(t-1)} = \frac{(t^2-1) - (t^2-4)}{(t-2)(t-1)} = \frac{3}{(t-2)(t-1)}.$$

Do đó

$$Q = \frac{1}{t(t-1)} \cdot \frac{(t-2)(t-1)}{3} = \frac{t-2}{3t} = \boxed{\frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}}.$$

b)  $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2(2-\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3}-1.$

$$Q = \frac{(\sqrt{3}-1)-2}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-3}{3(\sqrt{3}-1)} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3(\sqrt{3}-1)} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

### Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x+2$ . Điều kiện:  $x \geq -1$ .

Chuyển vế và bình phương:  $\sqrt{2x+3} = (x+2) + \sqrt{x+1}$  (vế phải  $> 0$ ), suy ra

$$2x+3 = (x+2)^2 + 2(x+2)\sqrt{x+1} + (x+1) \Rightarrow -(x+1)(x+2) = 2(x+2)\sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow -(x+2)[(x+1) + 2\sqrt{x+1}] = 0.$$

Vì  $x \geq -1$  nên  $x+2 > 0$  và  $(x+1) + 2\sqrt{x+1} \geq 0$ , dấu bằng khi  $\sqrt{x+1} = 0$ . Vậy  $x = -1$  (thỏa). Nghiệm:  $\boxed{x = -1}$ .

b) Phương trình hoành độ giao điểm:  $x^2 = (m+3)x - 3m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 3m = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-m) = 0$ . Vậy hai giao điểm có hoành độ  $x = 3$  và  $x = m$  (phân biệt  $\Leftrightarrow m \neq 3$ ), tung độ tương ứng  $y = 9$  và  $y = m^2$ .

$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{9} + \sqrt{m^2} = 5 \Leftrightarrow 3 + |m| = 5 \Leftrightarrow |m| = 2 \Leftrightarrow \boxed{m = 2 \text{ hoặc } m = -2}.$$

(Cả hai đều thỏa  $m \neq 3$ .)

### Câu 3 (2,0 điểm)

a) Gieo hai lần:  $n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$ .  $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 6$  chia hết cho  $(x-2) \Leftrightarrow P(2) = 0$ :

$$8 - 4a + 2b - 6 = 0 \Leftrightarrow 2b - 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2a - 1.$$

Với  $a, b \in \{1, \dots, 6\}$ :  $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$  — có 3 trường hợp. Xác suất An thắng:

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

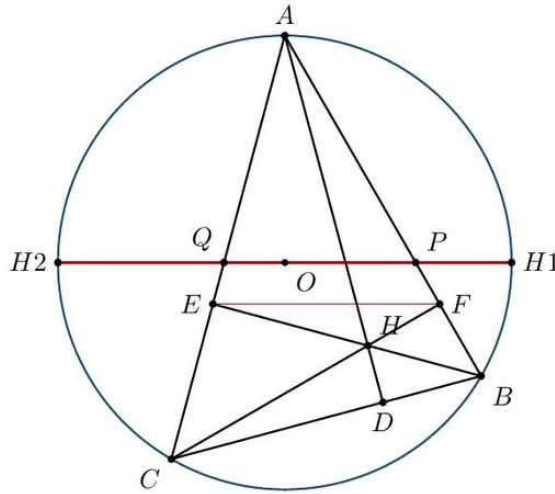
b) Tìm nghiệm nguyên không âm của  $(x+y)^2 = x+2$ . Đặt  $s = x+y \in \mathbb{N}$ , ta có  $x = s^2 - 2$  và

$$y = s - x = s - s^2 + 2 = -(s-2)(s+1).$$

$x \geq 0 \Rightarrow s^2 \geq 2 \Rightarrow s \geq 2$ ;  $y \geq 0 \Rightarrow (s-2)(s+1) \leq 0 \Rightarrow s \leq 2$  (vì  $s+1 > 0$ ). Vậy  $s = 2$ , suy ra  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

$$(x; y) = (2; 0) \quad (\text{thử lại: } (2+0)^2 = 4 = 2+2).$$

#### Câu 4 (2,5 điểm)



a) Tứ giác  $BCEF$  nội tiếp và  $AB \cdot AF = AC \cdot AE$ .

$BE \perp AC$ ,  $CF \perp AB \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ . Hai điểm  $E, F$  cùng nhìn  $BC$  dưới góc vuông nên  $B, C, E, F$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $BC$ .

$A$  nằm ngoài đường tròn đó, hai cát tuyến  $AFB$  và  $AEC$  cho (phương tích của  $A$ ):

$$AF \cdot AB = AE \cdot AC \quad \text{tức} \quad AB \cdot AF = AC \cdot AE.$$

b)  $PQ \parallel EF$ .

Kẻ tiếp tuyến  $Ax$  của  $(O)$  tại  $A$ . Theo góc tạo bởi tiếp tuyến và dây:  $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$ . Do  $BCEF$  nội tiếp nên  $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$  (góc ngoài bằng góc trong đối). Suy ra  $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$ , hai góc đồng vị tạo bởi cát tuyến  $AB$  nên  $Ax \parallel EF$ . Mà  $OA \perp Ax$  (bán kính vuông góc tiếp tuyến) nên  $OA \perp EF$ . Lại có  $PQ \perp OA$  (giả thiết). Do đó  $PQ \parallel EF$ .

c) Giả sử  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Chứng minh chu vi  $\triangle HPQ$  bằng  $2R$ .

Gọi  $H_1, H_2$  lần lượt là điểm đối xứng của trực tâm  $H$  qua  $AB$  và qua  $AC$ . Hai điểm này nằm trên  $(O)$  (kết quả quen thuộc).

Vị trí của  $H_1$ : đối xứng giữ góc nên  $\widehat{H_1BA} = \widehat{HBA}$ . Trong tam giác vuông  $ABE$  có  $\widehat{HBA} = \widehat{EBA} = 90^\circ - \widehat{A}$ . Vậy  $\widehat{H_1BA} = 90^\circ - \widehat{A}$  là góc nội tiếp chắn cung  $AH_1$ , suy ra

$$\text{sđ cung } AH_1 = 2(90^\circ - \widehat{A}) = 180^\circ - 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{AOH_1} = 180^\circ - 2\widehat{A}.$$



Với  $\widehat{A} = 45^\circ$ :  $\widehat{AOH_1} = 90^\circ$ , tức  $OH_1 \perp OA$ . Tương tự  $OH_2 \perp OA$ . Do đó  $H_1, H_2$  là hai đầu mút của đường kính vuông góc với  $OA$  — chính là đường thẳng  $PQ$  (đi qua  $O$ , vuông góc  $OA$ ). Vậy  $H_1, H_2 \in PQ$  và  $H_1H_2 = 2R$ .

Vì  $P \in AB$  và  $H_1$  đối xứng với  $H$  qua  $AB$  nên  $HP = H_1P$ ; tương tự  $HQ = H_2Q$ . Bốn điểm  $H_2, Q, P, H_1$  thẳng hàng theo thứ tự đó, nên

$$\text{chu vi } \triangle HPQ = HP + PQ + QH = H_1P + PQ + QH_2 = H_1H_2 = \boxed{2R}.$$

### Câu 5 (2,0 điểm)

a) Gọi cạnh đáy (hình vuông) là  $a$  và chiều cao là  $h$  (mét,  $a, h > 0$ ). Thể tích lòng hồ:  $a^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$ . Tổng diện tích mặt trong (một đáy + bốn mặt bên):

$$S = a^2 + 4ah = a^2 + 4a \cdot \frac{4}{a^2} = a^2 + \frac{16}{a} = a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a}.$$

Theo bất đẳng thức AM–GM cho ba số dương:

$$S = a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} = 3\sqrt[3]{64} = 12 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a^2 = \frac{8}{a} \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow h = \frac{4}{2^2} = 1$ .

Vậy người thợ thiết kế **cạnh đáy**  $a = 2 \text{ m}$ , **chiều cao**  $h = 1 \text{ m}$  (khi đó diện tích nhỏ nhất là  $12 \text{ m}^2$ ).

b) Sau 2026 bước, tọa độ của robot là

$$T = \varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 2 + \cdots + \varepsilon_{2026} \cdot 2026, \quad \varepsilon_k \in \{+1; -1\}.$$

Vì  $\varepsilon_k \cdot k$  luôn cùng tính chẵn lẻ với  $k$  (do  $k$  và  $-k$  cùng tính chẵn lẻ), nên

$$T \equiv 1 + 2 + \cdots + 2026 \pmod{2}.$$

Mà  $1 + 2 + \cdots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027$  là số lẻ. Do đó  $T$  luôn là số lẻ, không thể bằng 0.

**Kết luận:** sau 2026 bước, robot **không thể** quay trở lại đúng gốc tọa độ  $O$ .