

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi này có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (chuyên)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 9$ và $(x-1)(y-1)(z-1) = 6$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{xy+z-8} + \frac{1}{yz+x-8} + \frac{1}{zx+y-8}$.

b) Một chiếc hộp chứa 6 viên bi màu trắng được đánh số từ 1 đến 6, 7 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được hai viên bi có màu khác nhau và số ghi trên hai viên bi đó cũng khác nhau.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + (x+2)\sqrt{2x-1} - 8x - 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 - 2(x+2)y^2 + x^2y = 2x^3 + 4x^2 \\ y^2 + (2x+4)\sqrt{12-2y} + x^2 + 5x + 10 = 0. \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn $2m^2 + mn - 2n^2 + m + n = 0$.

a) Chứng minh rằng $m + n$ là số chính phương và n chia hết cho 6.

b) Giả sử n chỉ có đúng 2 ước nguyên tố. Chứng minh $n = 144$.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại I . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại J . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH .

a) Chứng minh $\frac{AI}{AJ} = \frac{EF}{BC}$.

b) Chứng minh $\Delta ADM \sim \Delta JAO$ và $IN \perp AM$.

c) Lấy O' đối xứng với O qua M . Chứng minh tứ giác $DNIO'$ nội tiếp.

Câu 5. (0,5 điểm) Cho 2026 số nguyên dương phân biệt lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2^{45} . Biết rằng mỗi số trong các số trên không có ước nguyên tố nào khác ngoài 2 và 3. Chứng minh rằng có thể chọn ra một vài số trong 2026 số trên sao cho tích của chúng là lũy thừa với số mũ 45 của một số nguyên dương.

.....Hết.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Bài tập 1 (Lim Olympic - Quảng Ninh - Bài 1)

- ① Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 9$ và $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 6$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{1}{xy + z - 8} + \frac{1}{yz + x - 8} + \frac{1}{zx + y - 8}$$

- ② Một chiếc hộp chứa 6 viên bi màu trắng được đánh số từ 1 đến 6, 7 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được hai viên bi có màu khác nhau và số ghi trên hai viên bi đó cũng khác nhau.

Lời giải.

- ① Vì $x + y + z = 9 \Rightarrow xy + z - 8 = xy + (9 - x - y) - 8 = xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$

Chúng minh tương tự ta được

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(x - 1)(y - 1)} + \frac{1}{(y - 1)(z - 1)} + \frac{1}{(z - 1)(x - 1)} \\ &= \frac{x + y + z - 3}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)} = 1 \end{aligned}$$

- ② Số cách lấy 2 viên bi trong hộp là: $\frac{21 \cdot 20}{2} = 210 \Rightarrow n(\Omega) = 210$

Xét 3 trường hợp khi bốc 2 viên bi:

◇ **Trường hợp 1: 1 bi trắng và 1 bi xanh**

Chọn 1 bi xanh khác số bi trắng: Trong 7 bi xanh sẽ có đúng 1 viên mang số giống với bi trắng vừa chọn. Do đó, số cách chọn bi xanh là $7 - 1 = 6$ cách.

Nên số cách bốc 1 bi trắng và 1 bi xanh thỏa mãn yêu cầu là: $6 \cdot 6 = 36$ cách.

◇ **Trường hợp 2: 1 bi xanh và 1 bi đỏ**

Tương tự trường hợp 1 ta được $7 \cdot 7 = 49$ cách.

◇ **Trường hợp 3: 1 bi đỏ và 1 bi trắng**

Số cách bốc bi trắng: 6 cách. Chọn 1 bi đỏ khác số bi trắng: Tương tự, số cách chọn bi đỏ là $8 - 1 = 7$ cách. Nên số cách chọn trong TH3 là $6 \cdot 7 = 42$ cách

Vậy $n(A) = 36 + 49 + 42 = 127$.

Do đó xác suất cần tính là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{127}{210}$.

Bài tập 2 (Lim Olympic - Quảng Ninh - Bài 2)

- 1 Giải phương trình $x^2 + (x+2)\sqrt{2x-1} - 8x - 6 = 0$.
- 2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - 2(x+2)y^2 + x^2y = 2x^3 + 4x^2 \\ y^2 + (2x+4)\sqrt{12-2y} + x^2 + 5x + 10 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

- 1 Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + (x+2)(\sqrt{2x-1} - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-5) + \frac{2(x+2)(x-5)}{\sqrt{2x-1} + 3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5) \left(x + \frac{2(x+2)}{\sqrt{2x-1} + 3} \right) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $x \geq \frac{1}{2}$ nên $x + \frac{2(x+2)}{3 + \sqrt{2x-1}} > 0$. Do đó, từ (*) cho ta $x = 5$.

Thử lại, thỏa mãn. Vậy $x = 5$.

- 2
$$\begin{cases} y^3 - 2(x+2)y^2 + x^2y = 2x^3 + 4x^2 & (1) \\ y^2 + (2x+4)\sqrt{12-2y} + x^2 + 5x + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow y(y^2 + x^2) - 2y^2(x+2) - 2x^2(x+2) = 0 \Rightarrow (y^2 + x^2)(y - 2x - 4) = 0$.

TH1: $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$. Thay vào (2) thấy không thỏa mãn.

TH2: $y - 2x - 4 = 0 \Rightarrow y = 2x + 4 \Rightarrow x \leq 1$.

Thay vào (2) suy ra: $(2x+4)^2 + (2x+4)\sqrt{4-4x} + x^2 + 5x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 21x + 26 + (2x+4)\sqrt{4-4x} = 0$$

Đặt $\sqrt{1-x} = t \geq 0 \Rightarrow x = 1 - t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $5(1-t^2)^2 + 21(1-t^2) + 26 + (2(1-t^2)+4)2t = 0$

$$\Leftrightarrow (5t^4 - 10t^2 + 5) + (21 - 21t^2) + (6 - 2t^2)2t + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^4 - 4t^3 - 31t^2 + 12t + 52 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2(5t^2 + 16t + 13) = 0$$

Do $t \geq 0$ nên $t = 2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -2$.

Vậy hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất $x = -3, y = -2$.

Bài tập 3 (Lim Olympic - Quảng Ninh - Bài 3)

Cho m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn $2m^2 + mn - 2n^2 + m + n = 0$.

- ① Chứng minh rằng $m + n$ là số chính phương và n chia hết cho 6.
- ② Giả sử n chỉ có đúng 2 ước nguyên tố. Chứng minh $n = 144$.

 Lời giải.

- ① Giả thiết tương đương $(m + n)(2m - n + 1) = n^2$.

Đặt $d = (m + n, 2m - n + 1)$ thì $m + n$ và $2m - n + 1$ chia hết cho d nên n^2 chia hết cho d^2 hay n chia hết cho d nên m chia hết cho d , từ đó kết hợp $2m - n + 1$ chia hết cho d suy ra 1 chia hết cho d hay $d = 1$.

Vì vậy $m + n$ là số chính phương.

Giả sử n lẻ thì $n \equiv 1 \pmod{2}$ nên $0 \equiv 2m^2 + mn + m + n - 2n^2 \equiv 2m + 1 \equiv 1 \pmod{2}$, vô lý. Vậy n là số chẵn hay n chia hết cho 2.

Vì $m + n$ là số chính phương nên tồn tại số nguyên dương t sao cho $m + n = t^2$ hay $m = t^2 - n$.

Thay vào giả thiết có $2(t^2 - n)^2 + n(t^2 - n) - 2n^2 + n + t^2 - n = 0$ hay $2t^4 - 3t^2n - n^2 + t^2 = 0$.

Do đó $n^2 = t^2(2t^2 - 3n + 1)$.

Nếu n không chia hết cho 3 thì t^2 và $2t^2 - 3n + 1$ không chia hết cho 3.

Vì thế $t^2 \equiv 1 \pmod{3}$, khi đó $2t^2 - 3n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, vô lý.

Do đó n chia hết cho 3, và vì n chẵn nên n chia hết cho 6.

- ② Vì $(m + n)(2m - n + 1) = n^2$ nên từ ý 1 suy ra tồn tại x, y nguyên dương để $m + n = x^2$, $2m - n + 1 = y^2$, $(x, y) = 1$, vì thế $xy = n$ hay $m = x^2 - xy$.

Suy ra $y^2 = 2m - n + 1 = 2x^2 - 3xy + 1$.

Từ đó $17x^2 = 4y^2 + 12xy + 9x^2 - 4 = (2y + 3x)^2 - 4 = (2y + 3x - 2)(2y + 3x + 2)$.

Vì n chỉ có 2 ước nguyên tố và chia hết cho 6 nên tồn tại a, b nguyên dương sao cho $n = 2^a 3^b$, và $n = xy$ và để ý $x > 1$ nên ta có các trường hợp:

◇ **Trường hợp 1:** $x = 2^a$ và $y = 3^b$.

Suy ra $17 \cdot 2^{2a} = (2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a - 2)(2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a + 2)$.

Do $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a - 2 < 2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a + 2$, hai số cùng chẵn, không cùng chia hết cho 8, và $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a - 2 > 4$, vì thế sẽ chỉ xảy ra các trường hợp sau:

☆ $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a - 2 = 34$, suy ra $b \leq 2$, thử $b = 1$ và $b = 2$ suy ra vô nghiệm.

☆ $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a - 2 = 68$ nên 70 chia hết cho 6, vô lý.

☆ $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a + 2 = 34$ suy ra 32 chia hết cho 6, vô lý.

☆ $2 \cdot 3^b + 3 \cdot 2^a + 2 = 68$, suy ra $b \leq 3$.

Thử từng trường hợp suy ra $b = 2$, từ đó $a = 4$ hay $n = 144$.

◇ **Trường hợp 2:** $x = 3^b$ và $y = 2^a$.

Suy ra $17 \cdot 3^{2b} = (2^{a+1} + 3^{b+1} - 2)(2^{a+1} + 3^{b+1} + 2)$.

Để ý $(2^{a+1} + 3^{b+1} - 2, 2^{a+1} + 3^{b+1} + 2) = 1$ và $2^{a+1} + 3^{b+1} - 2 > 1$ nên có hai trường hợp:

☆ $2^{a+1} + 3^{b+1} - 2 = 17$ suy ra $b = 1$, thử lại vô nghiệm.

☆ $2^{a+1} + 3^{b+1} + 2 = 17$ suy ra $b = 1$, thử lại vô nghiệm.

◇ **Trường hợp 3:** $x = 2^a 3^b$, $y = 1$.

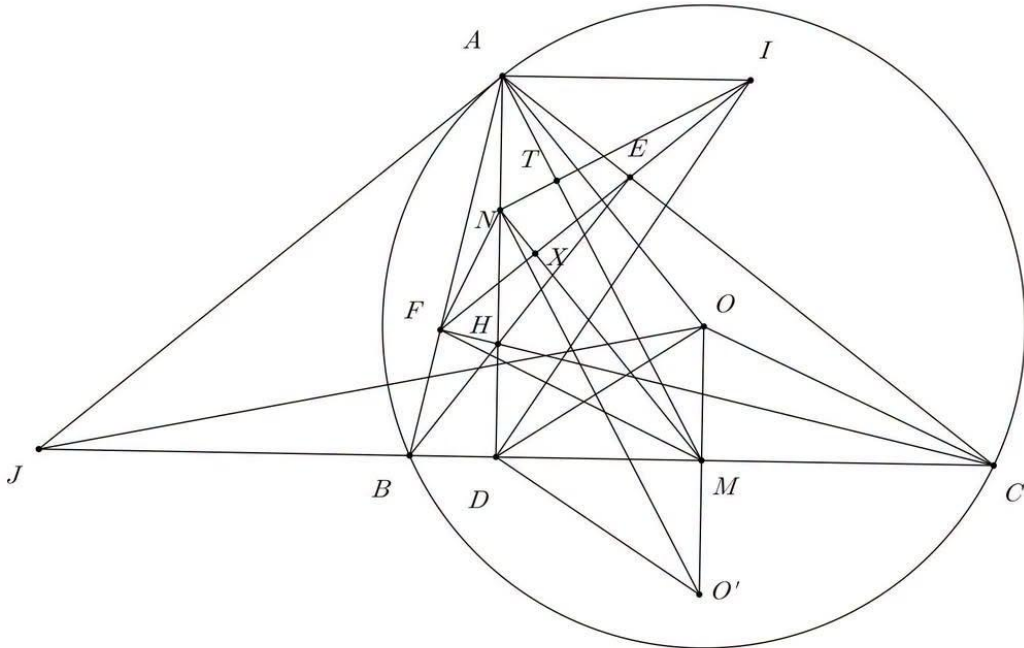
Suy ra $17x^2 = (2 + 3x - 2)(2 + 3x + 2)$ hay $x(3 - 2x) = 0$, vô lý do $x > 1$ là số nguyên.

Qua tất cả trường hợp đã xét ta có $n = 144$ là giá trị duy nhất thoả mãn.

Bài tập 4 (Lim Olympic - Quảng Ninh - Bài 4)

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại I . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại J . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH .

- ① Chứng minh $\frac{AI}{AJ} = \frac{EF}{BC}$.
- ② Chứng minh $\triangle ADM \sim \triangle JAO$ và $IN \perp AM$.
- ③ Lấy O' đối xứng với O qua M . Chứng minh tứ giác $DNIO'$ nội tiếp.



✍ Lời giải.

- ① Do tứ giác $BECF$ nội tiếp nên $\widehat{ABJ} = \widehat{FEC} = \widehat{AEI}$ và $\widehat{IAE} = \widehat{ACB} = \widehat{JAB}$ nên $\triangle EAI \sim \triangle BAJ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AI}{AJ} = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ (do $\triangle AEF \sim \triangle ABC$)

- ② Tứ giác $AOMJ$ nội tiếp đường tròn đường kính $OJ \Rightarrow \widehat{AOJ} = \widehat{AMD} \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle JAO$.
Ta dễ có các kết quả $MF \perp NF$ và $MN \perp EF$ tại X .

Gọi đường thẳng qua N vuông góc với AM tại T cắt EF tại I' .

Ta có $\triangle NTM \sim \triangle NXI' \Rightarrow NT \cdot NI' = NX \cdot NM = NF^2 = NA^2 \Rightarrow \widehat{NAI'} = 90^\circ$ (hệ thức lượng đảo) $\Rightarrow AI' \parallel BC \Rightarrow I'$ trùng I hay $IN \perp AM$ tại T .

- ③ Theo tính chất quen thuộc $2OM = AH \Rightarrow O'MNA$ là hình bình hành.

$\Rightarrow O'N \parallel AM$ và $O'M = AN \Rightarrow O'N \perp IN$.

Ta có $\triangle IAN \sim \triangle ADM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IA}{AN} = \frac{AD}{DM} \Rightarrow \frac{IA}{O'M} = \frac{AD}{DM} \Rightarrow \triangle AID \sim \triangle MO'D$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{MDO'} \Rightarrow \widehat{IDO'} = \widehat{IDM} + \widehat{O'DM} = \widehat{IDM} + \widehat{ADI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IDO'} = \widehat{INO'} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $DNIO'$ nội tiếp.

Lưu ý.

Ta có thể giải bằng cách khác như sau:

- ② Ta chứng minh: $\frac{AN}{AI} = \frac{DM}{DA}$ hay: $\frac{OM}{AI} = \frac{DM}{DA}$ hay $\frac{OM}{DM} = \frac{AI}{AD}$.

Do đó ta cần: $\triangle AID \sim \triangle MOD$.

Đặt $x = EF$, $b = AC$ và $c = AB$.

Dễ chứng minh được: $\frac{IE}{IF} = \frac{AE^2}{AF^2}$ suy ra: $IE = x.c^2/(b^2 - c^2)$ và $IF = x.b^2/(b^2 - c^2)$.

Suy ra: $AI = \frac{bcx}{b^2 - c^2}$.

Đặt $x = EF$, $b = AC$ và $c = AB$.

Dễ chứng minh được: $\frac{IE}{IF} = \frac{AE^2}{AF^2}$ suy ra: $IE = x.c^2/(b^2 - c^2)$ và $IF = x.b^2/(b^2 - c^2)$.

Suy ra: $AI = \frac{bcx}{b^2 - c^2}$.

Sử dụng định lý Pytago ta có: $DM = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ suy ra: $\frac{OM}{DM} = \frac{AH}{2DM} = \frac{a.AH}{b^2 - c^2}$.

Ta cần có: $\frac{a.AH}{b^2 - c^2} = \frac{bcx}{AD.(b^2 - c^2)}$

hay là: $a.AH = \frac{bcx}{AD}$ hay là: $BC.AD = \frac{AB.AC.EF}{AH}$ hay là: $BC.AD.AH = AB.AC.EF$.

Ta có: $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$. Do đó: $\frac{EF}{BC}.AB.AC = \frac{AE}{AB}.AB.AC = AE.AC$.

Ta cần có: $AD.AH = AE.AC$ hay tam giác AHE đồng dạng ACD (g.g) (đúng).

- ③ Ta có: $O'NAM$ là hình bình hành do đó: $O'N \parallel AM$ suy ra: $\widehat{O'NI} = 90^\circ$. Lại có từ ý 2 ta có: $\widehat{ADI} = \widehat{ODM}$ suy ra: $\widehat{IDO'} = \widehat{IDM} + \widehat{O'DM} = \widehat{AID} + \widehat{ODM} = \widehat{AID} + \widehat{ADI} = 90^\circ$.

Do đó: $\widehat{O'DI} = 90^\circ$. Vậy ta thu được: $INDO'$ là tứ giác nội tiếp.

Bài tập 5 (Lim Olympic - Quảng Ninh - Bài 5)

Cho 2026 số nguyên dương phân biệt lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2^{45} . Biết rằng mỗi số trong các số trên không có ước nguyên tố nào khác ngoài 2 và 3. Chứng minh rằng có thể chọn ra một vài số trong 2026 số trên sao cho tích của chúng là lũy thừa với số mũ 45 của một số nguyên dương.

Lời giải.

Gọi 2026 số đã cho là $x_i = 2^{a_i}3^{b_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2026$) với $0 \leq a_i, b_i \leq 44$.

Xét 2026 số $y_i = x_1 x_2 \cdots x_i = 2^{A_i}3^{B_i}$ với $i = 1, 2, \dots, 2026$, trong đó

$$A_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i, \quad B_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i.$$

Với mỗi i , xét cặp số dư $(A_i \pmod{45}, B_i \pmod{45})$, có tất cả $45 \cdot 45 = 2025$ cặp số dư có thể có, trong khi ta có 2026 cặp. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $i > j$ sao cho

$$A_i \equiv A_j \pmod{45}, \quad B_i \equiv B_j \pmod{45}.$$

Do đó $A_i - A_j \equiv 0 \pmod{45}$ và $B_i - B_j \equiv 0 \pmod{45}$. Mặt khác ta có:

$$\frac{y_i}{y_j} = x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_i = 2^{A_i - A_j} 3^{B_i - B_j}.$$

Vì $A_i - A_j$ và $B_i - B_j$ đều chia hết cho 45, nên tồn tại các số nguyên không âm u, v sao cho

$$A_i - A_j = 45u, \quad B_i - B_j = 45v.$$

Suy ra $x_{j+1} x_{j+2} \cdots x_i = 2^{45u} 3^{45v} = (2^u 3^v)^{45}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.