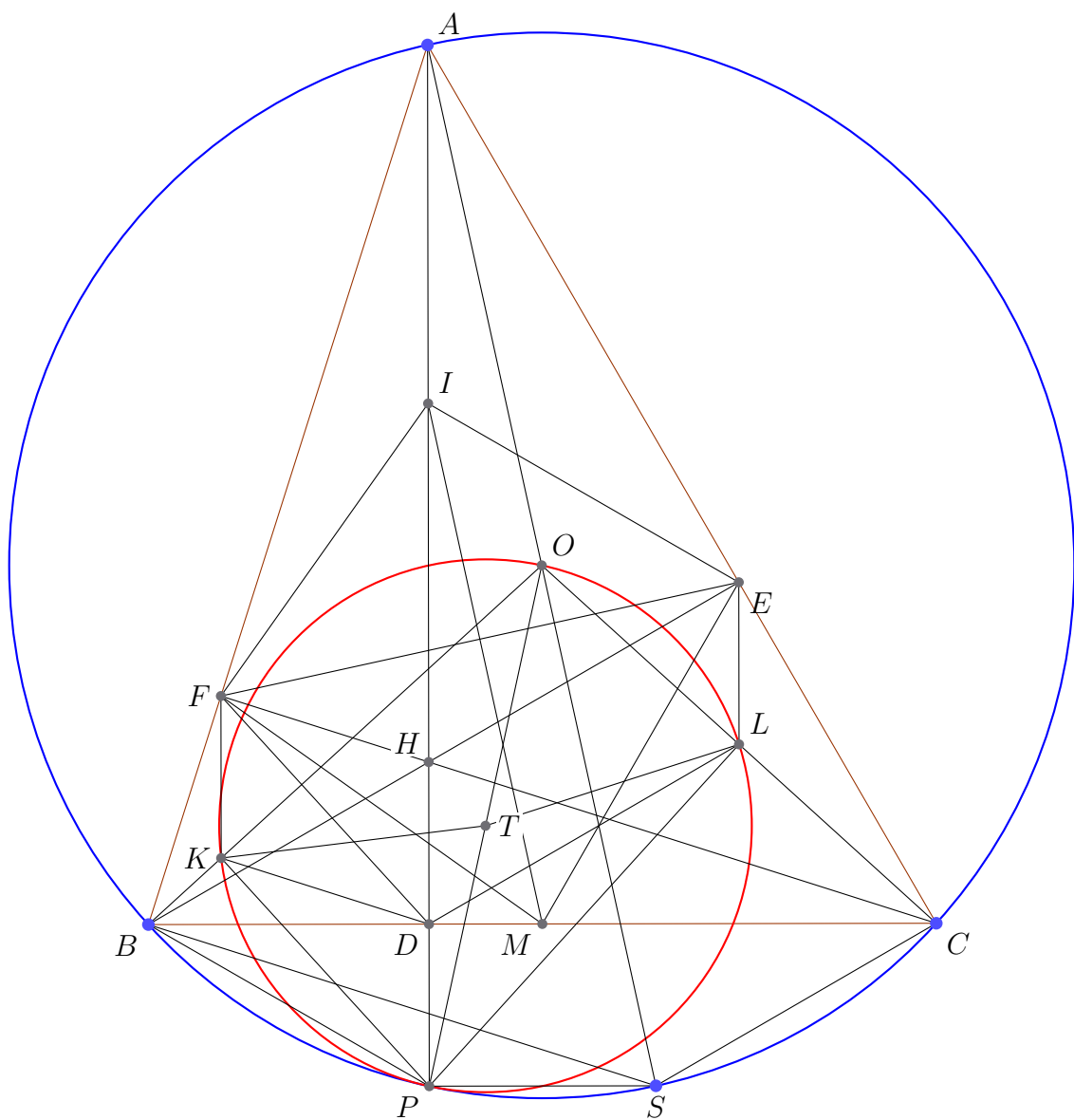


MỘT SỐ ĐỀ ÔN TẬP THI CHUYÊN - TẬP 1

Nguyễn Lan Anh

THPT Chuyên Biên Hoà - Ninh Bình





Thân tặng các em học sinh khoá sau trường THCS Trần Phú!

1 Giới thiệu

Với niềm đam mê dành cho Toán học đồng thời muốn đóng góp, giúp đỡ các bạn học sinh khoá sau có thêm tài liệu tham khảo, tài liệu được tôi bắt đầu thực hiện từ khoảng đầu tháng 6 năm 2026, ngay sau khi hoàn thành kì thi tuyển sinh và trúng tuyển vào trường THPT Chuyên Biên Hoà và kết thúc Tập 1 với 25 đề tự luyện vào cuối tháng 7 để dồn toàn bộ tâm trí cho việc học đội tuyển của năm học mới. Trong đây bao gồm các đề thi chuyên chính thức năm 2026 và phía sau là 25 đề thi do tôi biên soạn dựa trên kiến thức và kinh nghiệm đã được đúc kết sau thời gian ôn tập miệt mài. Các đề thi chính thức sẽ không có đáp án để tiết kiệm dung lượng cho tài liệu. Cấu trúc đề thi sẽ đa dạng, không cố định theo dạng đề thi chuyên ở một trường hay tỉnh nào cả mà tham khảo theo cấu trúc ở các trường như KHTN và chuyên các tỉnh khác để các bạn rèn luyện kĩ năng. Theo đánh giá của tôi thì bộ đề này khá khó cho học sinh THCS, phù hợp với những bạn có nền chắc và muốn thử sức làm những bài toán đột biến yêu cầu tư duy cao hơn. Phần đề tự luyện được viết không có đáp án ngay sau, các bạn hãy nghiêm túc giải và suy nghĩ như đi thi thật để đạt hiệu quả cao nhất, tránh đọc đáp án ngay vì làm vậy sẽ không cảm nhận được vẻ đẹp cũng như phần khó của bài toán. Cùng với đó, tài liệu này cũng là lời tri ân sâu sắc dành cho các cô giáo đã rèn giũa tôi trong những năm tháng cấp 2 dưới mái trường THCS Trần Phú thân yêu, và lời chia sẻ về kinh nghiệm làm bài dành cho các bạn học sinh. Xin chân thành gửi lời cảm ơn đến các thầy cô, các tác giả của những tài liệu tham khảo đã cung cấp nhiều kiến thức quý báu. Xin cảm ơn bạn **Ngô Thu Thủy - THPT Chuyên Bắc Ninh** đã hỗ trợ mình hoàn thiện bộ tài liệu.

Trong quá trình thực hiện, tôi đã hết sức nghiêm túc và đặt trọn tâm huyết, dành nhiều thời gian tìm hiểu tổng hợp và chỉnh sửa, song với kiến thức và kinh nghiệm còn hạn chế, tài liệu chắc chắn vẫn không thể tránh khỏi nhiều thiếu sót, mong bạn đọc thông cảm và góp ý. Mọi ý kiến đóng góp xin mọi người gửi về địa chỉ [*hsgscsp2011@gmail.com*](mailto:hsgscsp2011@gmail.com)

Tôi mong rằng đây sẽ là tài liệu tham khảo có ích dành cho thầy cô và các bạn học sinh đang ôn tập. Xin chúc các bạn thành công!

Mục lục

1	Giới thiệu	6
2	Các đề thi chính thức	10
3	Các đề tự luyện	68
4	Đáp án các đề tự luyện	104

Lời tri ân

-Kính gửi cô giáo **Phạm Thị Ngoan**, giáo viên dạy đội tuyển toán 7 và là giáo viên chủ nhiệm lớp 7A7 năm học 2023 - 2024! Với em, cô là một người giáo viên đáng kính và cũng là người mà em luôn yêu quý, biết ơn trân trọng. Năm đó, nhờ sự tin tưởng và kì vọng của cô, khi cô chọn em vào đội tuyển học sinh giỏi thành phố; trong thời gian học bồi dưỡng trước khi thi, em nhớ mãi một bài hình mà em giải được nhanh nhất đội tuyển và nhận được lời khen của cô, cùng với sự may mắn giành được đạt giải nhì, em đã có lại sự tự tin và bản lĩnh để chinh phục được những thử thách lớn hơn sau này. Trong suốt cả năm học, em nhớ rằng mình đôi khi rất nghịch ngợm: chơi bài trong tiết học của cô, hay thậm chí trốn tiết để đi loanh quanh trường,... Nhưng cô luôn bao dung và tha thứ cho em. Cô như người mẹ hiền luôn yêu thương bảo ban em dưới mái trường THCS Trần Phú, giúp em có được ngày hôm nay. Một lần nữa, em xin chân thành cảm ơn cô và xin phép gửi lời chúc sức khỏe đến cô!

-Kính gửi cô giáo **Nguyễn Thị Ngọc Tú**, giáo viên chủ nhiệm lớp 6A7 năm học 2022 - 2023 và cũng là giáo viên dạy đội tuyển năm học 2022 - 2023 và năm học 2025 -2026. Cô là người giáo viên để lại trong em nhiều ấn tượng nhất, không chỉ có lòng biết ơn thành kính mà còn có một chút "ghét". Năm học lớp 6, em từng rất sợ đến học thêm nhà cô vì cô hay mắng em tội đi học muộn mặc dù khi đó lỗi là của em và em cũng không biết tại sao mình ngủ lăm thế. Em nhớ khi ấy em còn sợ cô vì các hình phạt trên lớp nữa. Sang tới năm lớp 9, hồi đầu năm khi biết cô sẽ là giáo viên dạy bộ môn toán cho lớp em đã cảm thấy không thích, em cũng không rõ tại sao khi đó lại như thế. Vào khoảng tháng 3 sau khi biết mình trượt đội tuyển trường (lấy 6 người), kết quả đó đến từ nhiều yếu tố từ chính bản thân em đó là quá tự tin vào khả năng của mình, không chịu chấp nhận khuyết điểm và thậm chí buổi hôm đó em đã đến muộn và bị ảnh hưởng tâm lý. Sau đó em tự dần vật rất nhiều, có bạn đã nói rằng thực tế đội tuyển có thể lấy nhiều hơn nhưng em vẫn không được chọn mặc dù không rõ thông tin là đúng hay sai. Điều đó khiến em càng buồn hơn nữa, lúc ấy em đã sinh ra "ác cảm"dành cho cô, có những thái độ hành động mà em cho là không phải phép với giáo viên.

Từ hôm đó em lao đầu vào luyện tập và giải đề, những kết quả của các bạn được đi thi đạt giải nhất nhì tỉnh càng tiếp thêm động lực "trả thù"cho em. Tới những ngày cuối, ở lớp học thêm của thầy Bình em thấy mình hay giải bài nhanh nhất, đặc biệt là trong một buổi học hình nào đó khiến em nghĩ mình có thể xếp hạng cao, thậm chí còn mơ thủ khoa để bớt áy náy với kì thi chọn đội tuyển. Thế nhưng một lần nữa em lại quá tự tin vào bản thân mình, khi ở trong phòng thi không hiểu tại sao em không làm được bài như mong đợi dù nó thuộc dạng dễ so với mặt bằng chung các bạn và so với những đề em đã luyện tập hàng ngày. Em biết rõ điểm yếu của mình là phần hình học cực trị và tính mình hay ra (dù bài ra trong đề rất dễ) nhưng em đã bỏ qua phần đó khiến em lúng túng trong phòng thi. Vì đã mất bình tĩnh nên em đã không thể tập trung hoàn thiện trọn vẹn 1 câu nào cả mà chỉ cố gắng viết nhiều nhất có thể, viết ý của tất cả các câu trong đề mặc dù không biết đúng hay sai. Khi bước ra khỏi phòng thi và về nhà tự kiểm tra lại, so đáp án với các bạn thì em cảm giác rằng mình đã trượt chuyên. Những ngày từ lúc đi thi về đến tận phút trước khi biết điểm chuẩn và kết quả, em đã tự mình trải nghiệm cảm giác nuối tiếc và thất vọng tràn trề như là mình trượt chuyên thật. Có lẽ cho đến hiện tại thì đây là trải nghiệm thú vị giàu cảm xúc và đáng giá nhất của em.

Tới khi biết bản thân đã chính thức đỗ chuyên tỉnh, em mới trút bỏ cảm xúc tiêu cực kia xuống và một lần nữa, quay lại với sự tự tin và ước mơ chinh phục đỉnh cao mới. Khi nhìn lại hành trình và những cảm xúc đã qua, em lại có góc nhìn khác về cô. Giả sử, nếu ngày đó em được chọn vào đội tuyển tỉnh thì liệu em có tiếp tục cố gắng hay sẽ ngủ quên trên đó với ảo tưởng về năng lực của mình nhỉ? Nếu như cô không nghiêm khắc và "tàn nhẫn"như vậy thì liệu em có đủ trải nghiệm, vấp ngã để có được như ngày hôm nay hay không? Hơn nữa, lúc ấy cô đối xử với em vẫn như vậy thậm chí quan tâm hơn, cảm giác có một chút hi vọng dành cho em để hôm nay, em cảm thấy mình thật

buồn cười vì đã "ghét" cô kiểu đó.

Em xin chân thành gửi lời cảm ơn sâu sắc đến cô và tỏ lòng biết ơn, trân trọng khi đã được làm học sinh của cô. Cảm ơn cô rất nhiều!

-Kính gửi cô **Lê Thị Thanh Huê**, giáo viên dạy Ngữ Văn mà em theo học năm lớp 9.

Trước tiên, em xin cảm ơn cô vì đã bắt em làm đề quá nhiều (đối với em) để đạt được điểm 9 văn kì thi tuyển sinh. Hồi lớp 8 em có đi học thêm và được đánh giá khá cao vì thế em nghĩ lớp 9 cũng vẫn "dễ" như vậy. Cho tới khi đầu hè vào lớp học của cô, toàn bộ những thói quen viết bài hay những lập luận sơ sài đều bị cô bắt sửa lại toàn bộ. Suốt từ đó đến hết kì 1 em cảm giác văn mình đuối đi, đến học cô khá là áp lực và buồn ngủ. Nhưng sang đến kì 2 nhờ sự tăng cường và tâm huyết của cô, em đã đạt được phong độ ổn định hơn (hình như cũng không ổn lắm và vẫn buồn ngủ) rồi cuối cùng đạt kết quả tốt. Nói vui vậy thôi nhưng em nghĩ em trúng tuyển vào chuyên cũng nhờ điểm văn nữa, vì điểm chuyên của em thấp nhất lớp mà điểm văn lại cao nhất nên nó cũng "gánh" được một chút. Em xin cảm ơn cô vì đã dạy cho em những kiến thức hay, bổ ích và dành sự kì vọng cũng như tâm huyết vào bài giảng. Em chúc cô thật nhiều sức khỏe!

-Kính gửi thầy **Dương Gia Huy**, giáo viên mạnh nhất con từng học cho tới hiện tại.

Ấn tượng từ những buổi đầu tiên của con về thầy là thầy nói chuyện rất thân thiện, dễ tính và giảng bài dễ hiểu. Thầy là người đã định hướng, là người cho con biết tới các kiến thức và bài toán mới lạ và hóc búa để con trở nên giỏi hơn và là người luôn động viên, khích lệ con. Con biết mình hay có tính xấu là luôn cố gắng "phô diễn" những thứ không cần thiết và đôi khi ăn nói có phần không lễ phép, chính thầy là người đã máng con để con sửa lỗi và trở nên tốt hơn.

Lần đi thi thử ở Chuyên Sư phạm thầy có ra đón con thi xong nhưng con làm bài không tốt và cảm thấy khá có lỗi. Hôm thi thật ở chuyên tỉnh cũng thế, con nói rằng con chắc chắn trượt chuyên và không muốn theo toán nữa, thầy cũng là người bảo con là không được gục ngã sau thất bại, nhưng những ngày sau đó hình như thầy cũng cảm thấy thất vọng và không muốn nói chuyện với con:)). Khá là phát hoảng đấy chứ. Nhưng cuối cùng con vẫn may mắn đỗ chuyên, vẫn có thể tiếp tục theo đuổi con đường học toán.

Con cảm thấy biết ơn, may mắn vô cùng vì ngày đó đã được chuyển lớp và học trúng thầy. Cảm ơn thầy rất nhiều. Mong thầy dạy con 5 buổi dãy số như đã hứa:(và không trút giận lên học sinh học giỏi ở các khoá sau.

Sau đây là các đề thi chính thức chuyên toán năm 2026.

2 Các đề thi chính thức

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TUYÊN QUANG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng $\sqrt{8+2\sqrt{15}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{5} = 2$.
- b) Cho số thực x thỏa mãn $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x\sqrt{2-x}$.

Câu 2 (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (1), với m là tham số.
- a) Giải phương trình khi $m = 2$.
- b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 9$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy + x - y \\ x^2 - 2y - 1 + \sqrt{x^2 - 2y + 1} = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB . Trên cung nhỏ $\widehat{PN}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác APN , lấy điểm F sao cho $\widehat{PAF} = \widehat{MAC}$. Gọi D là giao điểm của AM và trung trực cạnh AB . Chứng minh rằng:

- a) Tam giác APF đồng dạng với tam giác AMC .
- b) $PD = PB \cdot \tan \widehat{NPF}$.
- c) Ba điểm B, F, D thẳng hàng.

Câu 4 (1,5 điểm)

- a) Lớp 10A có 18 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Biết xác suất để học sinh đó là nam bằng $\frac{3}{5}$; hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?
- b) Ban đầu, bạn A có 25 chiếc kẹo, bạn B có 26 chiếc kẹo và bạn C có 27 chiếc kẹo. Ba bạn A, B, C thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, bạn nào có nhiều kẹo nhất sẽ cho hai bạn còn lại mỗi bạn một chiếc kẹo và bỏ một chiếc kẹo vào hộp đựng kẹo chung. Xác định số kẹo của ba bạn A, B, C sau 52 lượt chơi.

Câu 5 (1,0 điểm)

- a) Giả sử d là một ước của $A = 3^{2^{22}} + 2^{2^{22}}$. Chứng minh rằng d cũng là một ước của $B = 3^{2^{26}} - 2^{2^{26}}$.
- b) Tìm ước chung lớn nhất của $C = 3^{2^{27}} + 2^{2^{27}}$ và $D = 3^{2^{2027}} + 2^{2^{2027}}$.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{14\sqrt{x}+6}{x+4\sqrt{x}+3} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} + \frac{-3\sqrt{x}+9}{x+3\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm tất cả các số thực x để M nhận giá trị nguyên.

2. Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2026}{abc}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 2bc - 2026} + \frac{1}{b^2 + 2ca - 2026} + \frac{1}{c^2 + 2ab - 2026} = 0.$$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 20$.

Câu 3. (0,5 điểm) Cho 6 điểm phân biệt A, B, C, D, E, F thứ tự nằm trên một đường tròn theo chiều quay của kim đồng hồ. Chọn ngẫu nhiên hai điểm trong các điểm đã cho và nối lại thành một đoạn thẳng. Tính xác suất để đoạn thẳng đó không phải là cạnh của lục giác $ABCDEF$.

Câu 4. (1,0 điểm) Thầy giáo An đi xe máy từ A đến B với một tốc độ không đổi. Khi từ B trở về A thầy quyết định tăng tốc độ thêm 10 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi 24 phút. Biết quãng đường AB dài 80 km. Tính tốc độ xe máy của thầy khi đi từ A đến B .

Câu 5. (0,5 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 2c} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2a} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2b} \leq \frac{1}{4}.$$

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2026^3$ chia hết cho 2027.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $(x^2 - x + 1)(y^2 - xy - 5) = x + 4$.

Câu 7. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường phân giác trong của tam giác cắt nhau tại I . Tia AI cắt (O) tại điểm M . Kẻ đường thẳng d vuông góc với AI tại I , d cắt các đường thẳng BC, AB, AC lần lượt tại các điểm S, E, F . Đường thẳng SM cắt (O) tại điểm K (khác M).

a) Chứng minh rằng OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

b) Chứng minh rằng $\triangle MBI$ cân tại M .

c) Chứng minh rằng $SI^2 = SB \cdot SC$ và $SM \perp IK$.

d) Đường thẳng IK cắt BC tại H . Tia MH cắt (O) tại P . Chứng minh rằng $APEF$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 8. (0,5 điểm) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$. Chứng minh rằng với mọi cách lấy ra 51 số khác nhau từ tập A thì luôn tồn tại hai số trong các số được lấy có tổng bằng 101.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI NGUYÊN**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} - \frac{8\sqrt{x} - 14}{x + \sqrt{x} - 20}$.

b. Cho phương trình $x^2 + 2(m + 5)x + m^2 + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 144$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + (2x + 1)^n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho đa thức $x + 1$. Chứng minh rằng, $P(2027) - 4$ chia hết cho 5.

Câu 3 (1,0 điểm). Có một nhóm 6 người gồm An, Bình, Cường, Duyên, Mai, Nam. Nếu người này kết bạn với người kia thì 2 người đó là bạn của nhau. Trong nhóm này, An chỉ kết bạn với Nam và Bình; Cường chỉ kết bạn với Bình và Duyên; Mai chỉ kết bạn với Nam và Duyên. Trong 3 người Bình, Nam, Duyên mỗi người là bạn với đúng 2 người khác trong nhóm 6 người trên. Trong 3 người An, Cường, Mai không có 2 người nào là bạn của nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 người trong nhóm 6 người trên. Tính xác suất của biến cố X : “2 người được chọn không là bạn của nhau”.

Câu 4 (2,0 điểm).

a. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $4a^2 + b^2 + c^2 - 9 = 5ab + 2bc + 4ca$. Chứng minh rằng, $ab + 1$ và $ab + 4a + 2b - 2c + 10$ đều là các số chính phương.

b. Chứng minh rằng, không tồn tại số nguyên n để $n + 2026$ và $n - 2$ đều là lập phương của các số nguyên.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) có AB là một dây cung không đi qua tâm của đường tròn. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại các điểm A, B cắt nhau tại điểm M . Kẻ tia Mx nằm giữa hai tia MA, MO . Gọi C và D là giao điểm của tia Mx với đường tròn (O) sao cho điểm C nằm giữa hai điểm M và D . Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng CD .

a. Chứng minh rằng, năm điểm M, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn và EM là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

b. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AB và MO . Đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm F ($F \neq C$). Chứng minh rằng, $MC \cdot MD = MH \cdot MO$ và đường thẳng DF song song với đường thẳng AB .

c. Đường thẳng DF cắt các tia MA, MB tương ứng tại các điểm P, Q . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EP và AD ; J là giao điểm của hai đường thẳng EQ và BD . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng IJ . Chứng minh rằng, ba điểm H, K, D thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Xác định tất cả các tập hợp X thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) Tập hợp X có 2026 phần tử. Các phần tử là các số thực dương. Tổng của tất cả các phần tử của tập hợp X bằng 2027.

ii) Với hai phần tử phân biệt bất kỳ a, b thuộc tập hợp X thì có ít nhất một trong hai số $|a - b|, a + b$ cũng thuộc tập hợp X .

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề. Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- c) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- a) Chứng minh rằng m là số chẵn.
- b) Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

- a) Chứng minh rằng $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3a + 4b + 2c} + \frac{1}{3b + 4c + 2a} + \frac{1}{3c + 4a + 2b}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi EM, FN là hai đường cao của tam giác DEF . Gọi I' là điểm đối xứng của I qua EF .

- a) Chứng minh rằng MN song song BC và I' là trực tâm của tam giác AEF .
- b) Chứng minh rằng $\widehat{DFI'} = \widehat{MEC}$ và $\widehat{I'MC} = 90^\circ$.
- c) Gọi S là giao điểm của $I'C$ với DE , T là giao điểm của ID với MC . Chứng minh rằng 5 điểm I', M, N, S, T cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu trên bảng có 100 số 1. Mỗi bước bạn An chọn một số a bất kỳ trên bảng sau đó xóa nó đi và thay thế bởi bốn số $\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}$. Chẳng hạn, nếu chọn số 1 thì An sẽ thay thế bởi bốn số $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

- a) Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước, trên bảng không có 77 số giống nhau.
- b) Tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho bất kể bạn An chọn số như thế nào thì sau mỗi bước, trên bảng luôn tồn tại ít nhất k số giống nhau.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề. Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin

Câu 1 (3,0 điểm).

- Một khách sạn mở cửa 24 giờ mỗi ngày. Quản lý phân công vị trí trực lễ tân theo giờ. Số giờ trực được chia đều cho số nhân viên lễ tân. Sau khi tuyển thêm 1 nhân viên mới thì thời gian trực của mỗi nhân viên lễ tân giảm 48 phút. Hỏi ban đầu khách sạn có bao nhiêu nhân viên lễ tân?
- Cho $P(x)$ là đa thức bậc 3 thỏa mãn $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Tính giá trị $P(0)$.
- Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 16} = x - 1 + \frac{3}{x - 1}$.

Câu 2 (1,5 điểm). Cho m, n là hai số nguyên dương, $m > 1$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p^m = 1 + 5 \cdot 2^n$.

- Chứng minh rằng m là số chẵn.
- Tìm tất cả các bộ (m, n, p) thỏa mãn.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

- Chứng minh rằng $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{(1 + c)^3} + \frac{b^3 + c^3}{(1 + a)^3} + \frac{c^3 + a^3}{(1 + b)^3}$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BH, CH .

- Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ và MN song song với EF .
- Đường tròn tâm O đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng M, N, P, Q thẳng hàng.
- Đường tròn đường kính DC cắt OC tại S (khác C), DS cắt AC tại T . Chứng minh rằng $AC \cdot TQ = AT \cdot QC$.

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu trên bảng viết cặp số có thứ tự $(2; 3)$. Mỗi bước bạn Phú được phép thay thế cặp $(x; y)$ trên bảng bằng một trong các cặp $(y; x), (-x; y), (y - x; y)$.

- Hãy chỉ ra một cách thực hiện để sau hữu hạn bước bạn Phú viết được cặp $(4; 1)$ lên bảng.
- Hỏi sau hữu hạn bước bạn Phú có viết được cặp $(2026; 2027)$ lên bảng hay không?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{1 - 2\sqrt{x} + x}$ khi $x = 20 - 3\sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} - 5}} + 3\sqrt[3]{\frac{32}{3\sqrt{3} + 5}}$.
- 2) Cho hàm số bậc nhất $y = \frac{m}{3m-2}x + \frac{m-1}{3m-2}$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng d . Tìm m để đường thẳng d cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

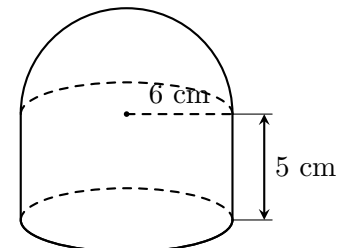
- 1) Giải phương trình: $\frac{3x}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{12x}{\sqrt{3x+9}+3} = x^2 + 7x$.
- 2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm)

- 1) Cho đa thức $P(x) = -x^3 - 4x^2 + 26x + d$ với d là tham số thực. Tìm hai số thực phân biệt m, n thỏa mãn $P(m) = P(n) = 0$ và tích $m.n$ nhỏ nhất.
- 2) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Câu 4. (3,0 điểm)

- 1) Cho tam giác ABC có trực tâm H , $\widehat{BAC} > 90^\circ$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại S . Gọi M, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AH .
 - a) Chứng minh rằng I là trực tâm tam giác SAM .
 - b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với đường tròn đường kính AH . Chứng minh rằng SK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCK .
- 2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kỳ thuộc miền trong của tam giác. Chứng minh khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác ABC .
- 3) Một vật dụng đựng mỹ phẩm được thiết kế gồm hai phần, phần thân là hình trụ có một đáy dưới là hình tròn với bán kính $r = 6$ cm, chiều cao $h = 5$ cm và phần nắp là một nửa hình cầu bán kính $r = 6$ cm (tham khảo hình vẽ). Người ta cần sơn mặt ngoài (bao gồm cả đáy) của vật dụng đó, tính diện tích cần sơn.



Một vật dụng đựng mỹ phẩm được thiết kế gồm hai phần, phần thân là hình trụ có một đáy dưới là hình tròn với bán kính $r = 6$ cm, chiều cao $h = 5$ cm và phần nắp là một nửa hình cầu bán kính $r = 6$ cm (tham khảo hình vẽ). Người ta cần sơn mặt ngoài (bao gồm cả đáy) của vật dụng đó, tính diện tích cần sơn.

Câu 5. (1,5 điểm)

- 1) Có hai tấm bìa hình tròn I và II ngoài nhau gắn trên cùng một mặt phẳng. Tấm bìa I được chia thành 4 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Tấm bìa II được chia thành 6 hình quạt như nhau ghi số lần lượt từ 1 đến 6. Trục quay của mỗi tấm bìa được gắn mũi tên cố định ở tâm. Người ta thiết kế để khi quay hai tấm bìa đến khi chúng dừng lại thì mũi tên gắn trên trục quay ở mỗi tấm bìa chỉ thuộc ngẫu nhiên bên trong một hình quạt nào đó. Trong trò chơi “Vòng quay may mắn”, người chơi sẽ quay lần lượt hai tấm bìa. Khi hai bìa dừng lại, mũi tên của tấm bìa I ở hình quạt ghi số x , mũi tên của tấm bìa II ở hình quạt ghi số y . Người chơi sẽ nhận được quà nếu $x + y$ là một số nguyên tố. Tính xác suất để người chơi nhận được quà.
- 2) Cho 29 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta muốn tô màu tất cả các đoạn thẳng nối giữa chúng, sao cho mỗi đoạn thẳng được tô bởi 1 màu và không có tam giác nào có hai cạnh cùng màu. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu để tô được như vậy?
- 3) Cho các số thực a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \geq 4 + 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = a + b + c + \sqrt{2}(|a - b| + |b - c| + |c - a|).$$

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I. (1,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{3x - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 3} - \frac{7x + 14\sqrt{x} + 7}{x - 2\sqrt{x} - 3}$ (điều kiện $x \geq 0; x \neq 9$).

Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 9$ sao cho $\frac{A}{\sqrt{x} + 4}$ nhận giá trị nguyên.

Câu II. (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : y = 2mx - 3m + 3$ và parabol $(P) : y = x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{2}{x_2 + 1} = 1$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (3x - y - 1)\sqrt{y + 1} + 3x - 1 = y\sqrt{3x - y} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Câu III. (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $\frac{7^a - 5^b}{8}$ là số nguyên tố.

3) Trên bảng có 2027 số 1. Bạn Đức thực hiện các lần biến đổi như sau:

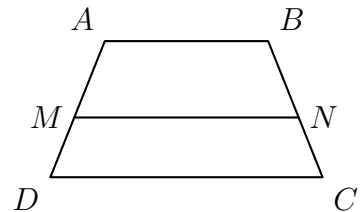
Lần 1: bạn Đức xóa đi số a_1 và số b_1 bất kì trên bảng sau đó thay bởi số $2\sqrt{a_1 b_1}$.

Lần 2: bạn Đức tiếp tục xóa đi số a_2 và số b_2 bất kì trên bảng sau đó thay bởi số $2\sqrt{a_2 b_2}$.

Bạn Đức tiếp tục thực hiện biến đổi như trên, sau 2026 lần thì trên bảng chỉ còn lại một số. Chứng minh số còn lại trên bảng nhỏ hơn 2027.

Câu IV. (3,0 điểm)

1) Một thửa đất có dạng hình thang $ABCD$ với hai cạnh đáy là $AB = 12(m)$ và $CD = 20(m)$. Trên các cạnh AD và BC người ta lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho MN song song với hai đáy đồng thời MN chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau (tham khảo hình vẽ bên). Tính độ dài của đoạn thẳng MN (đơn vị mét).



2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại P (khác A). Gọi E là điểm đối xứng với D qua M ; trên đường thẳng AO lấy điểm H sao cho HD vuông góc với đường thẳng BC tại D , trên đường thẳng AD lấy điểm F sao cho FE vuông góc với đường thẳng BC tại E .

a) Chứng minh bốn điểm B, H, C, F cùng nằm trên một đường tròn (ω) .

b) Gọi T là giao điểm khác F của AD và (ω) . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại Q (khác T). Chứng minh đường thẳng QA tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu V. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} \right]$$

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Một túi đựng các quả bóng cùng kích thước, cùng khối lượng, đồng chất; trong đó có 3 quả màu xanh, 3 quả màu đỏ, 4 quả màu vàng; các quả bóng cùng màu thì khác nhau. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 4 quả bóng từ túi đó. Tính xác suất để 4 quả bóng được lấy ra có đúng 2 màu.

2. Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh sản phẩm A, mỗi kilogram sản phẩm A có giá nhập về là 120 nghìn đồng và giá bán niêm yết là 200 nghìn đồng. Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 240 kg sản phẩm A. Để tăng số lượng sản phẩm bán ra, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 20 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu phần trăm của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x - 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

2. Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết rằng $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$. Tính giá trị của biểu thức $S = P(4) + P(0)$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB (C khác O và B). Đường thẳng d vuông góc với AB tại điểm C cắt nửa đường tròn (O) tại điểm M . Trên cung nhỏ MB lấy điểm N bất kỳ (N khác M và B), tia AN cắt đường thẳng d tại điểm F , tia BN cắt đường thẳng d tại điểm E . Đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác A).

1. Chứng minh $EN \cdot AB = EA \cdot ND$.
2. Chứng minh F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDN .
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng điểm I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi điểm N thay đổi.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{1}{ab} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab} \right)} + \sqrt{\frac{1}{bc} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc} \right)} + \sqrt{\frac{1}{ca} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca} \right)}.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $x - y$ là số nguyên tố và $3z^2 = xy + yz + zx$. Chứng minh rằng $8z + 1$ là số chính phương.

2. Cho tập hợp $X = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{2027}\}$. Chứng minh rằng trong 92 số khác nhau bất kỳ được lấy ra từ tập hợp X luôn tồn tại hai số x và y sao cho $|x - y| < \frac{1}{2}$.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NINH BÌNH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{3x + yz} + \frac{1}{3y + xz} + \frac{1}{3z + xy} = \frac{6}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

2. Xét đa thức $P(x) = x^3 - mx + 1$, với m là một số thực. Giả sử đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực là a, b, c .

(a) Chứng minh $abc = -1$.

(b) Tìm tất cả các giá trị của m để $a^6 + b^6 + c^6 = 19$.

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^3(y^2 + 1) + \sqrt{2x} - 2 = 0 \\ 2x^2y(1 + \sqrt{y^2 + 3}) = x + \sqrt{3x^2 + \frac{1}{4}} \end{cases}$$

2. Một đoàn thiện nguyện dự định chở 48 tấn hàng để hưởng ứng phong trào “Hướng về Miền Trung thân yêu”. Khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa tăng thêm 7 tấn so với dự định, do đó đoàn thiện nguyện phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu, đoàn thiện nguyện dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau?

Bài 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Lấy điểm H nằm trên đoạn thẳng OC (H không trùng với O và C). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AC tại E và cắt đường thẳng AB tại F . Gọi D là giao điểm của đường thẳng BE với đường tròn $(O; R)$ (D không trùng với B). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ cắt đường thẳng EF tại G .

- Chứng minh ba điểm F, D, C thẳng hàng và tam giác FAD đồng dạng với tam giác FCB .
- Chứng minh G là trung điểm của EF và tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OC sao cho $OI + 4OH$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Đường thẳng qua B song song với đường thẳng FC cắt đường thẳng CA tại S . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng FH và AD . Chứng minh đường thẳng OS song song với đường thẳng CK .

Bài 4. (1,5 điểm)

- Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương thỏa mãn $x^2 - 2y^2 + 2x - y - xy = 21$.
- Cho 2026 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$. Chứng minh tồn tại hai số nguyên dương x, y thỏa mãn $y > 1$ và $xy + a_i$ chia hết cho $x + a_i$ với mọi số nguyên dương i từ 1 đến 2026.

Bài 5. (0,75 điểm) Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

1. Chứng minh $a + b + c \geq 3$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(2a + b + c)^3}{b + c} + \frac{(2b + c + a)^3}{c + a} + \frac{(2c + a + b)^3}{a + b}$.

Bài 6. (0,75 điểm) Có 8 “chú” mèo, mỗi “chú” được đặt tên là một dãy ký tự thuộc tập hợp $\{000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111\}$ sao cho không có hai “chú” mèo nào trùng tên. Hai “chú” mèo gọi là “liên kết” với nhau nếu trong dãy ký tự tên của chúng, có đúng một vị trí mà hai ký tự tương ứng khác nhau (ví dụ: hai “chú” mèo 000 và 001 được gọi là liên kết với nhau, nhưng hai “chú” mèo 000 và 011 thì không được gọi là liên kết với nhau). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, sao cho trong k “chú” mèo phân biệt được chọn tùy ý từ 8 “chú” mèo trên, tồn tại 3 “chú” mèo mà một “chú” liên kết với hai “chú” kia.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NINH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 9$ và $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 6$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{xy + z - 8} + \frac{1}{yz + x - 8} + \frac{1}{zx + y - 8}$.
- b) Một chiếc hộp chứa 6 viên bi màu trắng được đánh số từ 1 đến 6, 7 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 7 và 8 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 8. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất để lấy được hai viên bi có màu khác nhau và số ghi trên hai viên bi đó cũng khác nhau.

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình $x^2 + (x + 2)\sqrt{2x - 1} - 8x - 6 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3 - 2(x + 2)y^2 + x^2y = 2x^3 + 4x^2 \\ y^2 + (2x + 4)\sqrt{12 - 2y} + x^2 + 5x + 10 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho m, n là hai số nguyên dương thỏa mãn $2m^2 + mn - 2n^2 + m + n = 0$.

- a) Chứng minh rằng $m + n$ là số chính phương và n chia hết cho 6.
- b) Giả sử n chỉ có đúng 2 ước nguyên tố. Chứng minh $n = 144$.

Câu 4. (3,5 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng EF tại I . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại J . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AH .

- a) Chứng minh $\frac{AI}{AJ} = \frac{EF}{BC}$.
- b) Chứng minh $\triangle ADM \sim \triangle JAO$ và $IN \perp AM$.
- c) Lấy O' đối xứng với O qua M . Chứng minh tứ giác $DNIO'$ nội tiếp.

Câu 5. (0,5 điểm) Cho 2026 số nguyên dương phân biệt lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2^{45} . Biết rằng mỗi số trong các số trên không có ước nguyên tố nào khác ngoài 2 và 3. Chứng minh rằng có thể chọn ra một vài số trong 2026 số trên sao cho tích của chúng là lũy thừa với số mũ 45 của một số nguyên dương.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CAO BẰNG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm tất cả các giá trị x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,5 điểm)

- Một hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, được đánh số lần lượt từ 1, 2, 3, ..., 20. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp trên và quan sát số ghi trên thẻ đó. Tính xác suất của biến cố A : "Số ghi trên chiếc thẻ rút được chia hết cho cả 2 và 3".
- Giải phương trình sau: $x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$.
- Tìm tất cả các số thực a và b để đa thức $P(x) = ax^3 + 12x^2 + bx + 1$ là lập phương của một đa thức.

Câu 3. (2,0 điểm)

- Một cây cầu treo có trụ tháp đôi cao 60 m so với mặt cầu và được đặt tại hai điểm A, B , độ dài AB là 360 m. Dây cáp có dạng một đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp (như hình vẽ bên). Hãy tính độ cao của dây cáp tại vị trí C so với mặt cầu theo đơn vị mét. Biết C cách trung điểm O của đoạn AB là 90 m theo phương ngang.
- Một ống cống thoát nước bằng bê tông có dạng hình trụ rỗng với chiều cao bằng 2 m, đường kính đường tròn đáy ngoài là 1 m. Độ dày của cống là 0,1 m (như hình vẽ bên). Hỏi thể tích bê tông cần dùng để sản xuất ống cống trên là bao nhiêu mét khối? (Lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO , F là điểm chính giữa cung AB và E là điểm thuộc đường tròn (O) sao cho E, I, F thẳng hàng. Các tia Ax, By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) với Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB . Qua E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI và cắt Ax, By lần lượt tại M, N .

- Chứng minh rằng $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.
- Tính diện tích tam giác OMN theo R .

Câu 5. (2,0 điểm)

- Trong hình chữ nhật (H) kích thước là 6 cm và 4 cm cho năm điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Chứng minh rằng trong năm điểm đó luôn tồn tại ba điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính 2,5 cm.
- Cho p và $2p+1$ (với $p > 3$) là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $2p^2+7$ là hợp số.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SỞ LA**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 03 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

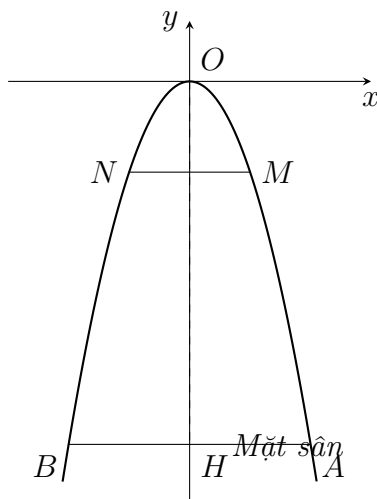
Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Với những giá trị nào của x thì biểu thức $P = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

Câu 2. (1,0 điểm) Hai đội công nhân dệt may cần sản xuất một số lượng khẩu trang theo đơn đặt hàng. Nếu làm chung thì sau 4 giờ họ sẽ làm xong. Nhưng hai đội mới làm chung được 3 giờ thì đội I nghỉ, đội II tiếp tục làm trong 3 giờ nữa mới xong. Hỏi mỗi đội nếu làm một mình thì phải bao lâu mới xong công việc?

Câu 3. (1,0 điểm)

- Cho phương trình $x^2 - x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = 3x_1x_2^2 + x_1 + x_2(3x_1^2 + 1)$.
- Ở một hội chợ thương mại, người ta dựng trên mặt sân một cái cổng có dạng parabol $y = ax^2$ (Hình 1). Biết cổng có chiều cao $OH = 6$ m và khoảng cách giữa hai chân cổng $AB = 4$ m. Người ta treo trên cổng một dây đèn trang trí $MN = 2$ m song song với AB . Tính giá trị của a và khoảng cách từ dây đèn đến mặt sân.



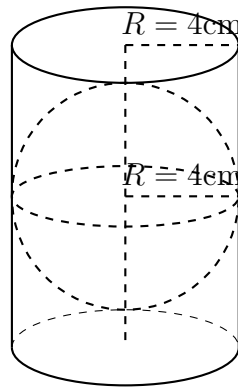
Hình 1

Câu 4. (1,0 điểm) Một hộp chứa 8 thẻ được đánh số từ 1 đến 8. Rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ từ hộp không hoàn lại. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- A : “Tổng hai số ghi trên hai thẻ là một số chia hết cho 10”.
- B : “Tích hai số ghi trên hai thẻ lớn hơn ba lần tổng của chúng đúng 1 đơn vị”.

Câu 5. (4,0 điểm)

- Một cơ sở sản xuất nền thơm thiết kế một mẫu quà tặng cao cấp. Mỗi bộ sản phẩm gồm một hộp nhựa hình trụ trong suốt và một viên nền thơm có dạng hình cầu được đặt vào bên trong hình trụ sao cho nằm vừa khít, tiếp xúc với mặt đáy và mặt xung quanh của hộp (Hình 2). Viên nền này có bán kính $R = 4$ cm.
 - Tính thể tích của hộp nhựa hình trụ và thể tích viên nền hình cầu. (Lấy $\pi \approx 3,14$ và theo đơn vị cm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
 - Để cố định viên nền và trang trí, cơ sở sản xuất đổ đầy phần không gian trống giữa viên nền và hộp nhựa bằng các hạt sếp màu li ti. Biết mỗi 100 cm^3 hạt sếp màu có giá là 15 000 đồng. Tính chi phí tiền mua hạt sếp màu để sản xuất 500 bộ quà tặng như trên. (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

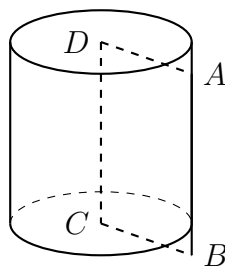


Hình 2

- Cho đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ đường kính CD vuông góc với AB . Lấy M thuộc cung nhỏ BC và AM cắt CD tại E . Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N . Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN .
 - Chứng minh: Các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh: $EN \parallel CB$ và $AM \cdot BN = 2R^2$.
 - Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (1,0 điểm)

- Một người thợ mộc tiện khối gỗ thành một hình trụ. Cắt hình trụ đó bởi một mặt phẳng chứa trục, ta được mặt cắt là một hình chữ nhật. Xét hình chữ nhật $ABCD$ được tạo bởi trục và một đường sinh của hình trụ (Hình 3). Biết chu vi của hình chữ nhật $ABCD$ bằng 12 cm. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ hình trụ này có thể đạt được là bao nhiêu?



Hình 3

2. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ là số chính phương.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. Trắc nghiệm (2,0 điểm)

1. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ là $(x; y)$ bằng

- A. $(-1; 4)$. B. $(-4; 1)$. C. $(1; -4)$. D. $(4; -1)$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AB = 4$ cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. 8 cm. B. 4 cm. C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

3. Một trường THCS có 40 học sinh đăng ký... bảng sau:

Nguyện vọng	Chuyên Toán	Chuyên Văn	Chuyên Anh	Chuyên Lý	Chuyên Hóa	Chuyên Địa
Số lượng	16	8	10	2	3	1

Số học sinh đăng ký dự thi chuyên Toán chiếm tỉ lệ là

- A. 30%. B. 25%. C. 40%. D. 12%.

4. Giả sử phương trình $x^2 + 2x - 6 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Giá trị của biểu thức $P = x_1 + x_2 - 2x_1x_2$ bằng

- A. 10. B. -10. C. -14. D. 14.

5. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Diện tích xung quanh bằng

- A. 15π . B. 45π . C. 30π . D. 48π .

6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn, biết $\widehat{ABD} = 80^\circ$ thì $\widehat{ACD}$ bằng

- A. 160° . B. 80° . C. 100° . D. 40° .

7. Kết quả của phép tính $\sqrt{(5 - 3\sqrt{2})^2} + \sqrt{18} + 6$ bằng

- A. 1. B. $6\sqrt{2} - 1$. C. $6\sqrt{2} + 11$. D. 11.

8. Gieo một con xúc xắc... xác suất 2 lần gieo giống nhau bằng

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm các giá trị của x sao cho $A = 3\sqrt{x} - 5$.

Câu 3. (1,0 điểm) Một doanh nghiệp sản xuất vỏ hộp nhận được một đơn đặt hàng, sản phẩm có dạng một hình trụ có nắp, với thể tích là $401,92 \text{ cm}^3$ (lấy $\pi \approx 3,14$). Doanh nghiệp nên thiết kế vỏ hộp với bán kính đáy bằng bao nhiêu cm để tổng diện tích vật liệu làm vỏ hộp là nhỏ nhất, mà thể tích không đổi?

Câu 4. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 + 3x + 2 = 6\sqrt{x^2 + 3x - 3}$.
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 2} + \sqrt{y - x + 1} = 3 \end{cases}$$
.
3. Giả sử phương trình $x^2 - 6x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 > x_2$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{|x_1 - 5| - |x_2| - 1}{x_1^2 + x_2^2}$.

Câu 5. (2,5 điểm) Cho đường tròn (O) , hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau tại O . Gọi K là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng OD (K khác $O; D$). Đường thẳng qua K , vuông góc với AK , cắt BC tại M . Gọi G là giao điểm của AM và CD .

1. Chứng minh rằng tam giác AMK vuông cân.
2. Gọi N là giao điểm của AK và BD . Chứng minh rằng MA là phân giác của $\widehat{CMN}$.
3. Gọi F là giao điểm của GN và KM , E là giao điểm của AF và MN , I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh rằng tứ giác $IFEB$ nội tiếp.

Câu 6. (1,5 điểm)

1. Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 2y + 1 = 0$.
2. Cho p là số nguyên tố lẻ và $a; b$ là các số tự nhiên thỏa mãn $\frac{p-1}{2} = a$ và $\frac{p^2-1}{2} = b$.
 1. Chứng minh rằng $(b-a) : p$.
 2. Tìm các số nguyên tố p sao cho a và b là các số chính phương.
3. Xét tập hợp S gồm tất cả các ước nguyên dương của số 2026^{2027} . Từ tập hợp S có thể chọn ra tối đa bao nhiêu số sao cho trong các số được chọn, không có 2 số nào là bội của nhau?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HOÁ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1: (2,0 điểm)

- a) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{8 + a^2 + b^2} = ab + 2$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $Q = a^3 + b^3$.
- b) Xét đa thức $P(x) = ax^2 + bx + 2$ với a, b là các hệ số thực. Biết rằng với mọi số thực x thỏa mãn $|x| \leq 1$ thì $|P(x)| \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |a| + |b|$.

Câu 2: (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 3\sqrt{2x-1} = 71 - 2(y^2 + 2y) \\ \sqrt{x^2 - x - 1 - y} = \frac{y+1}{\sqrt[3]{x-1-y}} \end{cases}.$$

Câu 3: (1,0 điểm) Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất chọn được số có tổng tất cả các chữ số là một số chẵn.

Câu 4: (2,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x + y)^2 + 4x = 4(y^2 - 3y + 9)$.
- b) Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $(p + q)^p = (q - p)^{2q-1}$.

Câu 5: (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường tròn ngoại tiếp (O) , đường cao AH (H thuộc cạnh BC) và tâm đường tròn nội tiếp là I . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M (khác điểm A). Gọi F là điểm đối xứng với A qua O . Đường thẳng MF cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K .

- a) Chứng minh rằng các tam giác INF và IMC là các tam giác cân.
- b) Chứng minh rằng tứ giác $NHIK$ nội tiếp đường tròn.
- c) Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D (khác điểm F), hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì tứ giác $SIKM$ là hình bình hành.

Câu 6: (1,0 điểm) Một thuật toán được lập trình trên máy tính như sau: ban đầu, một số số nguyên dương (nhiều hơn một số) được hiện lên màn hình. Sau đó, cứ mỗi giây, một số bằng tổng bình phương của tất cả các số đã hiện trên màn hình lại được hiện lên (ví dụ, nếu ban đầu có các số 1 và 3 được hiện trên màn hình, thì ở giây đầu tiên, số $10 = 1^2 + 3^2$ sẽ được hiện lên; ở giây thứ hai, số $110 = 1^2 + 3^2 + 10^2$ sẽ được hiện lên;...). Gọi n_k là số ước nguyên tố phân biệt của số hiện trên màn hình ở giây thứ k ($k \geq 1$). Chứng minh rằng $n_1 + n_2 + \dots + n_{2026} \geq 2053351$.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề. Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Toán

Câu I (2,0 điểm)

1. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 125. Tính xác suất của biến cố A: “Số được chọn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương liên tiếp”.
2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a + b + c = 0$ và $a^2 + c^2 - 4bc - 2b + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = abc$.

Câu II (2,0 điểm)

1. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $n = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 1}{abc}$. Chứng minh n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.
2. Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{x^3 + 3}{x + 2} = \frac{4y^2}{2y + 1}$.

Câu III (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(n; p)$ thỏa mãn đồng thời p là số nguyên tố và $4n^2 + p^3 + 4p^2 - 8p - 32$ chia hết cho $np + 4n$.
2. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{bc + 2a + 1}{a^2 + 1} + \frac{ca + 2b + 1}{b^2 + 1} + \frac{ab + 2c + 1}{c^2 + 1}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A , có đường cao AH . Lấy điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $OH > OA$. Đường thẳng AB cắt đường tròn tâm O bán kính OB tại điểm thứ hai T . Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AE > AT$. Đường trung trực của đoạn thẳng CE cắt đường thẳng AH tại điểm N .

1. Chứng minh bốn điểm A, E, N, C cùng thuộc một đường tròn.
2. Đường thẳng qua điểm A và song song với đường thẳng BC cắt đường trung trực của đoạn thẳng CE tại điểm K . Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng ET . Chứng minh $OFK = 90^\circ$.
3. Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB , đường tròn đường kính NK và đường thẳng TK cùng đi qua một điểm.

Câu V (1,0 điểm)

Xét số nguyên dương n và tập hợp S gồm n số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = 2000$.

2. Với mọi số tự nhiên k , $2 \leq k \leq n$, tồn tại các số nguyên dương i, j nhỏ hơn k (không nhất thiết phân biệt) sao cho $a_k = a_i + 4a_j$.
1. Chứng minh tất cả các phần tử của tập hợp S đều là số chẵn.
2. Tìm giá trị lớn nhất của n .

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề. Dành cho thí sinh dự thi vào lớp chuyên Tin

Câu I (2,0 điểm)

- Một hộp chứa 4 viên bi có cùng kích thước và khối lượng như nhau gồm: bi màu xanh, bi màu đỏ, bi màu tím và bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất của biến cố A : "Lấy được 2 viên bi trong đó có viên bi màu xanh".
- Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ac - 2bc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{1}{c+1}$.

Câu II (2,0 điểm)

- Với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 - b^3$ là số nguyên tố. Chứng minh $a^3 - b^3 + 2027$ chia hết cho 6.
- Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $3^x - 1 = 2 \cdot 13^y$.

Câu III (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $ab = 6c^2$ và $\frac{a^3 + b^3 + 27c^3}{2}$ là số nguyên tố.
- Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^2}{bc + 2a + 3} + \frac{b^2}{ca + 2b + 3} + \frac{c^2}{ab + 2c + 3}$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng MO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F ($ME < MF$). Kẻ đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AC tại điểm D . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và S là trung điểm của đoạn thẳng HE .

- Chứng minh tam giác BAF đồng dạng với tam giác MDC .
- Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Q . Đường thẳng QF cắt đường thẳng BC tại điểm T . Chứng minh điểm S thuộc đường thẳng MD và $\widehat{TSO} = 90^\circ$.
- Đường thẳng qua S vuông góc với đường thẳng BS cắt đường thẳng AC tại điểm P . Chứng minh $PA = PF$.

Câu V (1,0 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n ($n \leq 99$), xét 100 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- $1 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$.
 - Với mọi $1 \leq j < i \leq 100$ thì $a_i - a_j \neq n$.
- Khi $n = 2$, chứng minh $a_3 - a_1 \geq 4$.
 - Tìm tất cả giá trị của n để a_{100} nhỏ nhất.

— HẾT —

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ
NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM
2026

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 1)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình

$$3x + \sqrt[3]{(2+3x)(2-x)} \left(\sqrt[3]{2+3x} - 2\sqrt[3]{2-x} \right) = 6.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6xy = 2, \\ 3(4x^2 + 9y^2) = 6xy(4x^2 + 9y^2) + 30xy + 12. \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1. Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức

$$8x^3 + 27y^3 = 18xy + 4x + 6y + 4.$$

2. Ký hiệu $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Với $y_1, y_2, \dots, y_6$ là các số thực bất kỳ, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{2y_i}{1+y_i^2} \right)^2 \left(\frac{2y_{i+1}}{1+y_{i+1}^2} - \frac{2y_{i-1}}{1+y_{i-1}^2} \right), \text{ trong đó } y_0 = y_6, y_7 = y_1.$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho hình thoi $ABCD$ với $\widehat{BAD} < 90^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm M ($M \neq A, D$). Các đường thẳng CM và AB cắt nhau tại Q .

- Chứng minh rằng hai tam giác BCQ và DMC đồng dạng.
- Trên cạnh AB lấy điểm N ($N \neq A, B$). Đường thẳng CN cắt đường thẳng AD tại R . Chứng minh rằng $\frac{BN}{BQ} = \frac{DM}{DR}$.
- Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với AB, AD lần lượt tại B, D . Giả sử tiếp tuyến qua R (khác RD) và tiếp tuyến qua Q (khác QB) của (O) cắt nhau tại P . Gọi giao điểm của AP và QR là S . Chứng minh rằng đường thẳng CS đi qua trung điểm của MN .

Câu IV. (1,0 điểm)

Có 100 điểm phân biệt trong một ngũ giác lồi, các điểm này cùng 5 đỉnh của ngũ giác tạo thành 105 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ngũ giác được chia hoàn toàn thành những tam giác được tạo bởi các đoạn thẳng nối giữa 2 trong 105 điểm trên sao cho:

1. Không có 2 đoạn thẳng nào có điểm chung (ngoại trừ các đầu mút của chúng);
2. Mỗi tam giác không chứa bất kì điểm nào ở bên trong nó.

Tính số tam giác thỏa mãn những yêu cầu trên.

— **HẾT** —

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ
NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM
2026

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình

$$1 + 5\sqrt[3]{1 - 25x^2} + \sqrt[3]{1 + 5x} + \sqrt[3]{1 - 5x} = 4 \left(\sqrt[3]{(1 + 5x)^2} + \sqrt[3]{(1 - 5x)^2} \right).$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 + 6xy + x = 3(x^2 + 4y^2) + 1, \\ x^3 + 2 = x^2 + 2y. \end{cases}$$

Câu II. (1,5 điểm)

Xét phương trình $(x^3 + y)(y^3 + x) = 3^z$, trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

1. Chứng minh rằng khi $x = y$ thì không tồn tại z thỏa mãn phương trình.

2. Tìm tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn phương trình với $x > y$.

Câu III. (1,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a + b + c + d = 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - (a^5 + b^5 + c^5 + d^5).$$

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $\widehat{DCB} < \widehat{ADC} < 90^\circ$, giả sử có điểm P nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho PA vuông góc AD và PB vuông góc BC . Dựng hình bình hành $PAQB$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của Q lên AB .

1. Chứng minh rằng $\widehat{KQB} = \widehat{BCD}$.

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên CD . Chứng minh rằng $\frac{HD}{HC} = \frac{KB}{KA}$.

3. Lấy điểm R sao cho DR song song AH và CR song song BH . Gọi giao điểm của hai đường thẳng RH và AB là L . Chứng minh rằng các điểm D, C, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu V. (1,0 điểm)

Với mỗi dãy số $a_1, a_2, \dots, a_{600}$ gồm 600 số nguyên dương, ký hiệu m là số bộ (a_i, a_j, a_k) với $1 \leq i < j < k \leq 600$ thỏa mãn $a_j = a_i + 1$ và $a_k = a_j + 1$. Xét tất cả các dãy số như trên, hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của m .

— HẾT —

ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Đề chính thức

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ
PHẠM NĂM 2026

MÔN THI: TOÁN (VÒNG 2)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 = y + z$.

a. Chứng minh rằng $\sqrt{2(x - \sqrt{y})} = \sqrt{x + \sqrt{z}} - \sqrt{x - \sqrt{z}}$.

b. Tính $T = \frac{\sqrt{x - \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{z}}}{\sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x + \sqrt{z}}}$.

Câu 2. Cho đa thức $P(x)$ hệ số thực, bậc 30, có ít nhất 11 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng không tồn tại hai đa thức $Q(x), R(x)$ có hệ số thực, khác hằng số thỏa mãn: $P(x) = Q^3(x) + R^3(x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Cho (x_1, x_2, x_3, x_4) là hoán vị của bộ $(1; 2; 3; 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{|x_1 - 1|} + \sqrt{|x_2 - 2|} + \sqrt{|x_3 - 3|} + \sqrt{|x_4 - 4|}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (O') tiếp xúc với các cạnh AB, BC lần lượt tại N và E , và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại điểm M . Hai đường thẳng MN và ME lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm S và T .

a. Chứng minh rằng đường thẳng ST song song với đường thẳng NE .

b. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của ST với các cạnh AB, BC . Chứng minh rằng: $BP^2 = BQ^2 = TQ \cdot PS$.

c. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng tứ giác $IPBQ$ là hình thoi.

Câu 5. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương x sao cho tồn tại các số nguyên dương y, m thỏa mãn: $x^2 + 2^m = y^2$. Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho cả x và $x + 1$ đều thuộc S .

Câu 6. Cho bảng ô vuông 2026×2026 , mỗi ô được tô một trong hai màu đen hoặc trắng. Một bảng được gọi là hoàn hảo nếu số ô đen trên mỗi hàng và trên mỗi cột có ít nhất 1013 ô và không vượt quá 1200 ô. Chứng minh rằng ta luôn có thể chuyển S_1 thành S_2 sau hữu hạn bước chuyển màu (với S_1 và S_2 là hai bảng hoàn hảo bất kỳ), biết rằng mỗi bước chuyển ta thay màu một ô (từ đen sang trắng hoặc từ trắng sang đen) sao cho sau khi thay, bảng vẫn luôn hoàn hảo.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề*

Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y = 0$.
b) Cho n là một số nguyên dương và m là một ước số nguyên dương của $2n^2$. Hỏi $n^2 + m$ có thể là số chính phương không? Tại sao?

Câu 2 (7,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 = 5$.
b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(1+y^2-y^3) = y(x^2+y^2+1) \\ 31x^2-1 = 16(y-x\sqrt{4x^2-1}) \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

Một hộp có 7 viên bi gồm hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2; hai viên bi màu đỏ được đánh số 3 và 4; ba viên bi màu vàng được đánh số 5, 6 và 7.

- a) Một bạn học sinh chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi được chọn có 3 viên bi màu vàng”.
b) Thầy giáo tổ chức trò chơi bốc bi trúng thưởng như sau: Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp rồi bỏ lại, nếu trong các viên bi được chọn có hai viên bi được đánh số liên tiếp nhau thì bạn đó trúng thưởng. Bạn An là một học sinh tham gia trò chơi. Tính xác suất để bạn An trúng thưởng.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn có $BC > BA$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB , BC , CA lần lượt tại các điểm M , N , E . Gọi K là giao điểm của tia BI với đoạn thẳng NE .

- a) Chứng minh $\widehat{BIA} = \widehat{BNE}$ và $\triangle AKB$ là tam giác vuông.
b) Tia BI cắt đoạn thẳng AC tại điểm T . Chứng minh $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.
c) Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với AI . Tia NE và tia NM cắt đường thẳng d lần lượt tại các điểm F và D . Gọi H là giao điểm của AI và ME , O là giao điểm của hai đường thẳng HF và DI . Chứng minh bốn điểm A, O, I, F cùng thuộc một đường tròn.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) - \sqrt{11 + \frac{4}{xyz}}$$

Câu 6 (1,0 điểm).

Trên mặt phẳng cho 18 điểm phân biệt trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên bất kì lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ (3 điểm) (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi. Mỗi câu trả lời đúng 0,25 điểm).

Câu 1. Cho các số thực a, b thỏa mãn $\frac{13}{3\sqrt{7} + \sqrt{11}} + \frac{17}{4\sqrt{7} + 2\sqrt{11}} = a\sqrt{7} + b\sqrt{11}$. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 2. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a - b = 3$. Giá trị của biểu thức $A = a^2(a + 1) - b^2(b - 1) - 11ab + 6$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + (m - 2)^3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Câu 4. Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 - x + 6$ là một số chính phương.

Câu 5. Cho đa thức $P(x) = 4x^3 + ax + b$. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho các đa thức $x - 2$ và $x + 1$. Giá trị của $M = 2a - 5b$ bằng bao nhiêu?

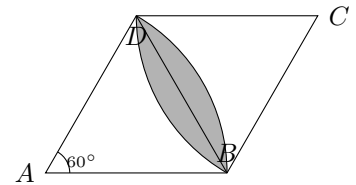
Câu 6. Cho α là góc nhọn thỏa mãn $\sin \alpha - 3 \cos \alpha = 0$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin^3 \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc cạnh BC). Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Độ dài đoạn thẳng CH bằng bao nhiêu?

Câu 8. Cho đường thẳng $(d) : y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 2)$. Tìm các số thực dương a, b để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB cân.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d) : y = 2mx + m^2 - m - 5$ cắt parabol $(P) : y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm A, B và $C(1; -3)$ thẳng hàng.

Câu 10. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 6 cm, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ lấy điểm A và điểm C làm tâm, vẽ các cung tròn có cùng bán kính bằng 6 cm. Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi hai cung tròn bằng bao nhiêu? (Hình vẽ bên).



Câu 11. Một bể cá cảnh hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm, người ta cho vào bể cá một viên đá trang trí thì thấy mức nước trong bể cá dâng lên 2 cm. Hỏi viên đá cảnh đó có thể tích bằng bao nhiêu?

Câu 12. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4$. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để số lấy được chia hết cho 3.

II- PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm) (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi).

Câu 13 (2 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = x^2 + x - 3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 6y = 1 \\ x(2x^2 - x - 2) - x^2y - 5y = -1 \end{cases}$$

Câu 14 (1 điểm). Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $2^x \cdot y^2 = 36x^2 + 12x + 16$.

Câu 15 (2 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Gọi A là giao điểm của MO và đường tròn $(O; R)$ (A nằm giữa M và O), từ điểm M vẽ đường thẳng cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm phân biệt N và P (N nằm giữa M và P , N khác A), đường thẳng đi qua N và vuông góc với MP cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O; R)$ tại điểm I . Vẽ tiếp tuyến IB với đường tròn $(O; R)$ (tiếp điểm B khác A và P). Gọi F là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng OB .

- Chứng minh $MN \cdot MP = MO^2 - R^2$ và $\triangle AMI$ đồng dạng $\triangle BNA$.
- Gọi (O') đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF (tâm O' khác O), đường thẳng OO' cắt MP tại J . Chứng minh IO' vuông góc với IJ .

Câu 16 (1 điểm). Cho a, b, c là 3 số thực dương và thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + 1}{(a + 1)^2} + \frac{b^2 + 1}{(b + 1)^2} + \frac{c^2 + 1}{(c + 1)^2} + \frac{1}{ab + bc + ca + 1}$.

Câu 17 (1 điểm).

- Cho a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a \geq 2$ thì giá trị của biểu thức $P = a^2b^2 - 2a - b$ không phải là một số chính phương.
- Cắt một tờ giấy hình chữ nhật theo một đường thẳng, được hai mảnh. Lấy một trong các mảnh đó, cắt theo một đường thẳng được hai mảnh, và làm tiếp như vậy nhiều lần. Hỏi cần phải cắt ít nhất bao nhiêu lần để được 16 hình lục giác?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề*

Câu I (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu II (2,0 điểm).

1. Một cửa hàng nhập về 120 chiếc xe đạp. Cửa hàng treo giá bán mỗi chiếc xe đạp tăng 30% so với giá lúc nhập về. Sau khi bán được 20 chiếc xe đạp, cửa hàng treo giá bán mới giảm 20% so với giá đã bán trước đó và với giá bán mới này thì 100 chiếc xe đạp còn lại đã được bán hết. Biết các chiếc xe đạp có giá nhập về bằng nhau và số tiền lãi của cửa hàng thu được sau khi bán hết 120 chiếc xe đạp là 50 triệu đồng. Hỏi giá nhập về của mỗi chiếc xe đạp là bao nhiêu triệu đồng?
2. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 3 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 + x_2^2 + mx_2 - 8 = 0$.

Câu III (3,5 điểm).

1. Từ một tấm gỗ hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 mét, bạn Toàn làm một cái bàn bằng cách xác định các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $MA = NB = PC = QD$ rồi cắt tấm gỗ theo các đường thẳng MN, NP, PQ, QM . Sau khi cắt, sản phẩm tạo ra là 1 mặt bàn có dạng hình tứ giác $MNPQ$ và 4 chân bàn có dạng là 4 hình tam giác AMQ, BNM, CPN, DQP . Tính độ dài đoạn thẳng MN biết diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{5}{9}$ lần diện tích hình vuông $ABCD$.
2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB \leq AC$ và AE là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ ($E \in BC$). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H ($M \in BC, N \in CA, P \in AB$). Biết AO cắt BC tại F và AH cắt PN tại K . Chứng minh:
 - a) PH là tia phân giác của $\widehat{MPN}$.
 - b) $\triangle AKP$ đồng dạng với $\triangle AFC$.
 - c) $EF \cdot EB \leq EM \cdot EC$.

Câu IV (1,5 điểm). Xếp ngẫu nhiên 5 bạn An, Bình, Tâm, Nhiên, Phúc ngồi trên một hàng ghế dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất của biến cố D : "An ngồi cạnh Bình nhưng An không ngồi cạnh Nhiên".

Câu V (1,5 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + xy - 2y + 3 = 0$.
2. Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $(m - n)(2m + 2n - 1) = m^2$. Chứng minh $m - n$ là số chính phương.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐÀ NẴNG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} - \frac{7\sqrt{ab} + 10b}{a + 4b + 5\sqrt{ab}} \right) : \frac{a + 12b + 7\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$, với $a, b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Khi P là số nguyên, tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a + 2025b}{a + 2026b}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Hai bạn An và Bình, mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một đỉnh của lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a .

- Mô tả không gian mẫu và các kết quả thuận lợi của biến cố M : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh trùng nhau”.
- Tính xác suất của biến cố N : “Bạn An và bạn Bình chọn được hai đỉnh mà khoảng cách giữa chúng bằng $a\sqrt{3}$ ”.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3}(x^2 - x) = \sqrt{3x^2 - 2x - 1}$.

b) Tại một Trường Trung học cơ sở A, khối lớp 8 có số học sinh nam gấp 3 lần số học sinh nữ; khối lớp 9 có số học sinh nam gấp 6 lần số học sinh nữ. Nếu tính chung cả hai khối thì tổng số học sinh là 750 và tổng số học sinh nam gấp 4 lần tổng số học sinh nữ. Hỏi khối lớp 8, khối lớp 9 ở Trường A, mỗi khối có bao nhiêu học sinh?

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tất cả các số thực âm a để parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d_1: y = x - a$ tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 và cắt đường thẳng $d_2: y = 2x - 3a$ tại hai điểm có hoành độ x_3, x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_1 - x_4} + \frac{1}{x_2 - x_4} = \frac{1}{3}$.

b) Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y sao cho giá trị biểu thức $\frac{x^2 + x - 2}{y^2 + 2y}$ là bình phương của một số nguyên tố? Vì sao?

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$), có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi P là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng BI .

a) Chứng minh rằng $2 \cdot \widehat{PIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ và ba điểm P, E, F thẳng hàng.

- b) Tia DI cắt các đường thẳng EF, PC lần lượt tại L, K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, IK . Chứng minh rằng MN vuông góc với EF và $\frac{DI}{DN} + \frac{NL}{NI} = 1$.

Câu 6. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Dựng hình bình hành $ABDC$. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm M sao cho tia DM nằm giữa tia DA và tia DC . Đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AC , cắt cạnh AB tại P và đường thẳng qua M , song song với đường thẳng AB , cắt cạnh AC tại Q . Đường thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tại F (F khác A). Chứng minh rằng tam giác MBC đồng dạng tam giác PMA và AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF .

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HUẾ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (1,5 điểm).

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x + 5\sqrt{x} + 6}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - 4} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

b) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = \sqrt{a(4-b)(4-c)} + \sqrt{b(4-c)(4-a)} + \sqrt{c(4-a)(4-b)} - \sqrt{abc}.$$

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Biết phương trình $x^2 + ax + b + 1 = 0$ ($b \neq -1$) có hai nghiệm nguyên phân biệt. Chứng minh $a^2 + b^2$ là hợp số.

b) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất chọn được số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a > b > c > 0$ và $\overline{abc} - \overline{cba}$ chia hết cho 21.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số tự nhiên x, y thỏa mãn $\frac{2^{p-2}}{p} = \frac{x^2 + 3}{2y^2 + 3x + 5}$.

b) Cho a và b là các số nguyên sao cho $a > b > 0$ và $ab(a+b)$ chia hết cho $a^2 + ab + b^2$. Chứng minh rằng $(a-b)^3 > 3ab$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 5$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

a) Chứng minh $ab = c^2 - 4c + 5$ và $c \leq 2$.

b) Chứng minh $\frac{6}{abc} + \frac{(a-2)^2}{b} + \frac{(b-2)^2}{c} + \frac{(c-2)^2}{a} \geq \frac{9}{2}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trên bàn có $2n$ chồng vở, mỗi chồng vở có ít nhất một quyển vở. Hai bạn An và Bình cùng chơi một trò chơi, An là người chơi trước, tiếp theo là Bình và cứ luân tự thay phiên nhau. Ở lượt chơi của mình, người chơi chọn một số nguyên k bất kì thỏa mãn $1 \leq k \leq n$ và thực hiện 2 bước liên tiếp sau:

- Bước 1: Lấy khỏi bàn k chồng vở và loại bỏ khỏi trò chơi.
- Bước 2: Chọn k chồng vở trong các chồng vở còn lại trên bàn và phân mỗi chồng vở đó thành hai chồng vở mới sao cho mỗi chồng vở mới đều phải có ít nhất một quyển vở.

Người thua là người đầu tiên mà khi đến lượt chơi của mình thì không thể thực hiện được cả hai bước trên và người còn lại sẽ thắng.

- a) Trường hợp $n = 1$ và mỗi chồng vở đều có 5 quyển. Chứng tỏ rằng với mọi cách đi của An thì Bình luôn có cách đi để thắng.
- b) Chứng minh rằng nếu lúc đầu có ít nhất một chồng vở có số vở là số chẵn thì An luôn có cách đi để thắng.

Câu 6 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Đường thẳng qua I và vuông góc với AI cắt BC tại Q . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại P ($P \neq A$), QP cắt (O) tại H ($H \neq P$). Gọi M là trung điểm BC , D là hình chiếu vuông góc của I lên BC , E là điểm đối xứng của D qua M và K là điểm đối xứng I qua O .

- a) Chứng minh $QI^2 = QB \cdot QC$.
- b) Chứng minh $IH \perp PQ$ và $KE \perp BC$.
- c) Chứng minh $AQPE$ là tứ giác nội tiếp và IM song song với AE .

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,5 điểm)

- Một cái túi chứa 5 quả bóng giống nhau được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (mỗi quả bóng được đánh một số khác nhau). Bốc ngẫu nhiên lần lượt hai quả bóng từ túi (mỗi lần bốc một quả, quả bóng bốc lần đầu không được hoàn lại). Tính xác suất của biến cố A: “Hai số ghi trên hai quả bóng bốc được đều là số chẵn”.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r sao cho $p < q < r$ và $pq + 25, pr + 100$ là những số chính phương.

Câu 2. (2,0 điểm)

- Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) . Gọi A, B là các điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -2 và 4 . Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.
- Cho a, b là hai số thực không âm và c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{3c - 2b}{\sqrt{a} + \sqrt{a + 2b - 3c}} = \sqrt{2b} + \sqrt{3c}.$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{5b + 4a + 8bc - 2038c}{a - 2b + 2023c}.$

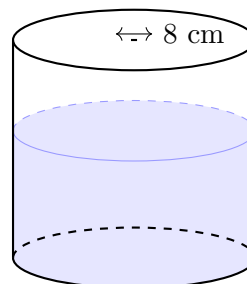
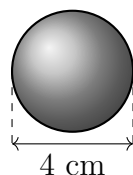
Câu 3. (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3 = 2\sqrt{(3y - x)(y + 1)} \\ 4xy - 2x - 2y - 1 = \sqrt{10y + 1} \end{cases}$$
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geq \frac{7}{1 + abc}.$$

Câu 4. (3,5 điểm)

- Một cốc thủy tinh dạng hình trụ được đặt thẳng đứng. Phía bên trong cốc có đường kính đáy bằng 8 cm và diện tích xung quanh bằng $96\pi \text{ cm}^2$.



- (a) Tính thể tích phần bên trong của cốc.
- (b) Một lượng nước được rót vào cốc sao cho độ cao của cột nước bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao thành bên trong cốc. Tính độ cao của cột nước trong cốc sau khi thả nhẹ một viên bi sắt dạng hình cầu, đường kính bằng 4 cm vào trong cốc nước.
2. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C .
- (a) Chứng minh H là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF .
- (b) Đường thẳng AO lần lượt cắt EF, BC và đường tròn (O) tại K, L, M (M khác A). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh $NL // HK$.
- (c) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại T (khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFT cắt đường thẳng BC tại hai điểm P, Q . Chứng minh $CP = CQ$.

Câu 5. (1,0 điểm) Viết tất cả các hợp số không vượt quá 30 lên bảng.

1. Có thể tô mỗi số trên bảng bởi một trong hai màu xanh, đỏ (cả hai màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?
2. Có thể xóa đi 3 số trên bảng và tô mỗi số còn lại bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng (cả ba màu đều được dùng) sao cho tích các số cùng màu bằng nhau được không? Tại sao?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIÀ LAI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Câu 1 (2,5 điểm)

- Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \right) \left(1 + \frac{x-1}{x+\sqrt{x+1}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.
 - Rút gọn biểu thức P .
 - Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ và $B = x_1^5 + x_2^5$.

Câu 2 (2,0 điểm)

- Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 1 = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.
- Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp S .
 - Tính xác suất để chọn được số chia cho 11 dư 2.
 - Tính xác suất để chọn được số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a + c = 4b$.

Câu 3 (1,5 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $3x^2 + 4xy + y^2 - 4x = 11$.
- Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $(m+n)(m^3 + 7n)$ là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên tố.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AN của đường tròn (O) . Gọi I và M tương ứng là trung điểm của AH và BC .

- Chứng minh tứ giác $BHCN$ là hình bình hành và $\widehat{EFD} = \widehat{EMC}$.
- Gọi G là giao điểm của AM và OH . Chứng minh IM vuông góc với EF và G là trọng tâm của tam giác ABC .
- Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$). Các tiếp tuyến tại A và K của đường tròn (I) cắt nhau tại T . Chứng minh TM, AH, EF đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm)

- Một số nguyên dương được gọi là "số tốt" nếu trong biểu diễn thập phân của nó thì chữ số 2 xuất hiện nhiều lần hơn chữ số 7 và nó được gọi là "số xấu" nếu chữ số 7 xuất hiện nhiều lần hơn chữ số 2. Chẳng hạn, 2027 có chữ số 2 xuất hiện 2 lần và chữ số 7 xuất hiện 1 lần nên 2027 là "số tốt"; còn 127 có chữ số 2 xuất hiện 1 lần và chữ số 7 xuất hiện 1 lần nên 127 không phải là "số tốt" cũng không phải là "số xấu". Trong tất cả các số nguyên dương không vượt quá 2027, hãy tìm hiệu của số lượng các "số tốt" và số lượng các "số xấu".

2. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + 4}{b + c} + \frac{b^3 + 4}{c + a} + \frac{c^3 + 4}{a + b}$$

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HOÀ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Câu 1 (2,00 điểm).

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{8}{x - 4}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.
- b) Cho đa thức bậc ba $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với hệ số nguyên. Biết $P(\sqrt{5}) = 5$ và $P(\sqrt[3]{5}) = 5\sqrt[3]{5}$. Tính $P(1)$.

Câu 2 (2,00 điểm).

- a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.
- b) Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích xác định. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 141 m^2 . Nếu giảm chiều dài 4 m và giảm chiều rộng 5 m thì diện tích giảm đi 230 m^2 . Tính diện tích của mảnh vườn.

Câu 3 (1,50 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số (m, p) với m là số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p^2 + pm = m^3$.
- b) Tìm số tự nhiên a để $(a^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Câu 4 (3,00 điểm).

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn, AB không là đường kính. Điểm C di động trên cung lớn AB sao cho ABC là tam giác nhọn và $CA < CB$. Điểm D là hình chiếu của C trên đường thẳng AB . Kẻ đường kính CI của đường tròn (O) , đường thẳng qua B vuông góc với CI cắt CI tại E .

- a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp.
- b) Chứng minh $CD \cdot CI = CA \cdot CB$ và DE song song với AI .
- c) Gọi F là hình chiếu của điểm A trên CI . Chứng minh khi điểm C di động thì tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF là một điểm cố định.

Câu 5 (1,50 điểm).

- a) Cho tập hợp X gồm 2026 số nguyên tùy ý. Chứng minh tồn tại một tập hợp T là tập hợp con của tập hợp X sao cho tổng các phần tử của tập hợp T chia hết cho 2026.
- b) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh $(1 + a)^2(1 + b)^3(1 + c)^4 > 256$.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÂM ĐỒNG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN (4,0 điểm) Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ ghi một phương án.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) có đồ thị là đường thẳng (d) . Xác định hệ số a, b để (d) đi qua hai điểm $A(1; 3), B(2; 4)$.

- A. $a = 1, b = 1$. B. $a = 1, b = 2$. C. $a = 2, b = 2$. D. $a = 2, b = 1$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = -2x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hai điểm B, C thuộc đồ thị có cùng tung độ là -8 . Khi đó, diện tích của tam giác OBC bằng

- A. 4. B. 16. C. 12. D. 8.

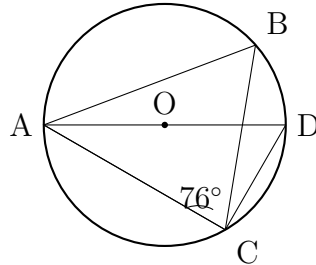
Câu 3. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2(m - 1)x - 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ bằng

- A. $4m^2 - 8m + 5$. B. $4m^2 - 8m + 9$.
C. $m^2 - 2m + 4$. D. $m^2 - 8m - 1$.

Câu 4. Cho $\triangle MNP$ vuông tại N . Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $NP = MP \cdot \cos P$. B. $NP = MN \cdot \cos P$.
C. $NP = MN \cdot \tan P$. D. $NP = MP \cdot \cot P$.

Câu 5. Cho đường tròn (O) đường kính AD , $\widehat{ACB} = 76^\circ$ (xem hình dưới). Số đo $\widehat{BAD}$ bằng



- A. 7° . B. 21° . C. 14° . D. 28° .

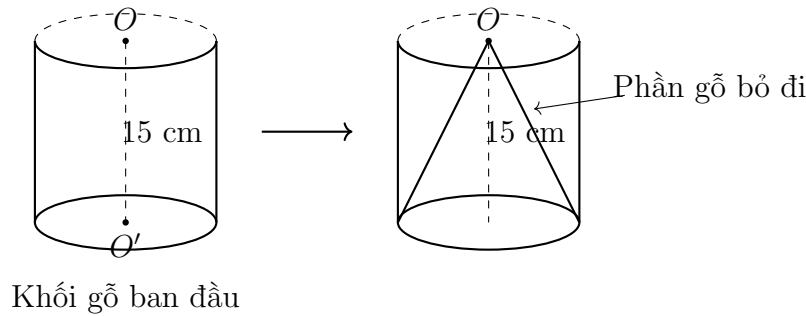
Câu 6. Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2; a + b + c = abc$. Giá trị biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ bằng}$$

- A. $P = 2$. B. $P = 3$. C. $P = 1$. D. $P = 4$.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (4,0 điểm)

Câu 3. Từ một khối gỗ hình trụ cao 15 cm, người ta tiện thành một khối gỗ hình nón có đỉnh trùng với tâm của một mặt đáy khối trụ gỗ ban đầu, đáy nón trùng với đáy trụ còn lại. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là 640π (cm³).



- a) Thể tích của khối gỗ hình trụ ban đầu gấp hai lần thể tích của khối nón.
- b) Thể tích của khối gỗ hình trụ ban đầu bằng 960π (cm³).
- c) Bán kính đáy của khối gỗ hình trụ bằng 8 (cm).
- d) Diện tích xung quanh của hình nón bằng 135π (cm²).

PHẦN III. TỰ LUẬN (12,0 điểm)

- Câu 1. (3,0 điểm)** a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$. Tìm m để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -4m$.
 b) Tìm a, b để $f(x) = ax^3 + bx^2 + 9$ chia hết cho $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

Câu 2. (3,0 điểm) a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y^2 + 2 - 2y(x + 1) = 4y\sqrt{x^2 - 2y + 2} \\ 3y^2 + 2xy - 2y = 2 \end{cases}$$

- b) Một hộp gồm 7 tấm thẻ ghi số $\{1; 2; 4; 6; 7; 11; 12\}$. Tính xác suất để tổng hai thẻ rút ra chia hết cho 3.

- Câu 4. (1,5 điểm)** a) Chứng minh $3a^2 + 4b^2 - 2a + 3 \geq 4ab + 4b$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.
 b) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + 2b^2 + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{b^2 + 2c^2 + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{c^2 + 2a^2 + 1}}$$

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,00 điểm)

a) Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2y + xy^2 = -21 \end{cases}$. Tính giá trị các biểu thức sau: $M = xy$; $N = x^2 + y^2$; $P = x^3 + y^3$; $Q = |x - y|$.

b) Giải phương trình $\sqrt{3x+3} + \sqrt{x^2+5} + 4x^2 + 2x = 26$.

c) Với x là số thực và $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 4x^2 - 19x + 58 + 5\sqrt{x+1}.$$

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên, biết đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = 1$, $P(-1) = -4$ và $P(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$.

b) Cô giáo mang lên lớp hai chiếc hộp, trong mỗi hộp chỉ có bi màu xanh và bi màu đỏ, mỗi hộp đựng không quá 20 viên bi. Cô gọi bạn An lên thực nghiệm, An sẽ kiểm kê số lượng và màu sắc bi trong hộp thứ nhất, rồi tính xác suất bốc được bi xanh khi bốc ngẫu nhiên 1 viên trong hộp này. Cô cũng gọi bạn Bình lên thực hiện tương tự như vậy đối với hộp thứ hai. Biết rằng hai bạn đều tính đúng và tổng xác suất tính được của hai bạn là $\frac{142}{143}$. Hỏi trong cả hai hộp có bao nhiêu viên bi xanh?

Câu 3. (1,50 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) vuông tại A có đường phân giác AD . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB và AC . Gọi I là giao điểm của DE và BF , K là giao điểm của CE và DF . Chứng minh rằng:

a) $\frac{IE}{ID} = \frac{EB}{EA}$

b) IK song song với BC .

c) AK vuông góc với BF .

Câu 4. (1,50 điểm) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở K . Trên cung nhỏ BC lấy điểm E ($E \neq B, C$). Đường thẳng KE cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK và CDK lần lượt tại G, H ($G, H \neq K$) và cắt đường tròn (O) tại F ($F \neq E$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ADF đồng dạng với tam giác AEG .

b) $EG = HF$.

Câu 5. (1,00 điểm) Cho a, b, c là các số nguyên dương, trong đó a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và $(a^2b + ab^2 + c^3)$ chia hết cho ac . Chứng minh rằng số a là lũy thừa bậc 3 của một số nguyên dương.

Câu 6. (1,00 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + ab}{b^2 + 3} + \frac{b^2 + bc}{c^2 + 3} + \frac{c^2 + ca}{a^2 + 3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2}.$$

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1: (2,0 điểm)

1.1. Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} = 2$. Tính giá trị biểu thức

$$P = (a - 1 - b^2)^{2026} + (a - 2 - b^2)^{2027}.$$

1.2. Tìm tất cả các số thực a, b sao cho a và b là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (2ab - 4)x + a^3 + b^3 - 12 = 0.$$

Bài 2: (2,0 điểm)

2.1. Trong giờ luyện tập, thầy giáo viết lên bảng phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$. Hai bạn Thanh và Phúc đều chép lại phương trình để giải nhưng sai đề: bạn Thanh chép sai hệ số a nên tìm được hai nghiệm là 4 và 8; bạn Phúc chép sai hệ số c thành số đối của nó nên tìm được 2 nghiệm là -2 và 8. Chứng minh phương trình của thầy giáo là vô nghiệm, biết rằng Thanh và Phúc đều giải đúng phương trình mình chép.

2.2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Xét điểm M di động trên BC sao cho diện tích $\triangle ABM$ bằng x , với $0 < x < \frac{1}{2}$. Lấy điểm N trên đoạn thẳng CD sao cho $\widehat{AMN} = 90^\circ$. Tìm x để diện tích $\triangle BDN$ nhỏ nhất.

Bài 3: (3,0 điểm)

3.1. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực của đoạn thẳng BC tại D .

a) Chứng minh tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm BC , H là trực tâm $\triangle ABC$. Chứng minh đường tròn tâm M bán kính MD tiếp xúc với đường tròn đường kính AH .

3.2. Cho $\triangle ABC$ đều. Trên cạnh AB , cạnh AC và tia đối của BA lấy các điểm D, E, F sao cho $AD = CE = BF$. Gọi G là trung điểm DE . Chứng minh $\widehat{FGC} = 90^\circ$.

Bài 4: (1,5 điểm)

4.1. Tìm tất cả số tự nhiên n thỏa mãn $n + S(n) = 2026$ với $S(n)$ là tổng các chữ số của n .

4.2. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $5a^2 - bc, 5b^2 - ca, 5c^2 - ab$ đều chia hết cho 8. Chứng minh abc chia hết cho 8.

Bài 5: (1,5 điểm)

5.1. Một hộp chứa 15 thẻ ghi các số $1; 2; 3; \dots; 14; 15$. Hai bạn An và Bình rút lần lượt mỗi bạn một thẻ từ hộp, An rút trước và không hoàn lại. Gọi a, b lần lượt là số ghi trên thẻ An và Bình rút được. Tính xác suất để cặp số (a, b) thỏa mãn phương trình $x^2 - ax + b = 0$ có nghiệm nguyên.

5.2. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: trong n số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số có tổng các chữ số chia hết cho 7.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐỒNG NAI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1: (2,0 điểm)

- Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x} - 12}{x - 3\sqrt{x} + 2} - \frac{7}{\sqrt{x} - 1} + \frac{8}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.
- Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 2 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - x_1x_2 = 3$.

Bài 2: (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = x - y \\ 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 1 \end{cases}$$
- Cho đa thức $P(x)$. Biết rằng, khi chia $P(x)$ cho đa thức x ta được phần dư bằng 2026 và khi chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ ta được đa thức dư là $5x + 2044$. Tính $P(1)$ và tìm đa thức dư khi chia $P(x)$ cho đa thức $Q(x) = x(x^2 - 1)$.

Bài 3: (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + q^2 + 30$ là số chính phương.
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

(a) $ab + bc + ca \leq 3$.

(b) $\frac{a}{\sqrt{2(a^4 + 7)}} + \frac{b}{\sqrt{2(b^4 + 7)}} + \frac{c}{\sqrt{2(c^4 + 7)}} \leq \frac{3}{4}$.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC .

- Chứng minh rằng tứ giác $BCFE$ nội tiếp.
- Kẻ đường kính AG của đường tròn (O) và gọi I là trung điểm đoạn thẳng GD . Chứng minh rằng $IE = IF$.
- Gọi R là giao điểm của đường tròn (O) và đường thẳng AD ($R \neq A$), đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PQR .

Bài 5: (1,0 điểm)

- Trong hộp có 5 quả bóng, mỗi quả được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4; 5 (hai quả bóng khác nhau ghi hai số khác nhau). Bạn An chọn ngẫu nhiên đồng thời hai quả bóng trong hộp. Tính xác suất để bạn An chọn được hai quả bóng có tổng bình phương của hai số ghi trên hai quả bóng là một số nguyên tố.

2. Cho bảng ô vuông 6×6 (là bảng gồm 6 hàng và 6 cột, mỗi hàng và mỗi cột gồm 6 ô vuông) như hình vẽ bên dưới. Hỏi có thể ghi được hay không vào mỗi ô vuông của bảng một trong các số 1; 2; 3; 5 sao cho tổng các số trên mỗi hàng chia hết cho 11, đồng thời tổng các số trên mỗi cột chia hết cho 13?

Bảng 6×6

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TÂY NINH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ (với $x > 0, x \neq 4$).

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên dương.

Câu 2. (2,0 điểm)

- Biết phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{1}{x_1^2 - 4x_1 + 5} + \frac{1}{x_2^2 - 4x_2 + 5}$.
- Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải làm 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, năng suất của tổ đã vượt năng suất dự định 3 sản phẩm mỗi ngày. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 4 ngày. Thực tế mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Câu 3. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2x = 2y^2 + 4y \\ 2\sqrt{2y+3} = x - y + 3 \end{cases}$$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của (O) sao cho D nằm giữa A và E , đồng thời tia AE nằm giữa hai tia AB và AO . Gọi H là giao điểm của AO và BC , K là trung điểm của đoạn thẳng DE .

- Chứng minh năm điểm A, B, O, C, K cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AE và BC . Chứng minh $AH \cdot AO = AI \cdot AK$.
- Đường thẳng CK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Chứng minh đường thẳng BF song song với đường thẳng AE .

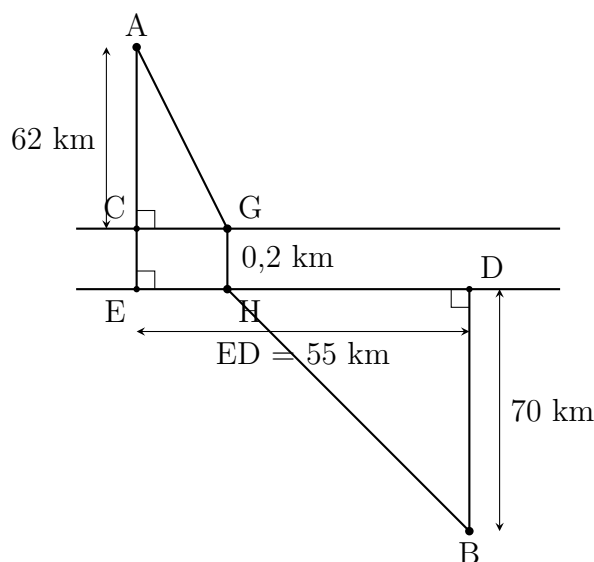
Câu 5. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình sau:

$$2x^2 - y^2 - xy + 3x = 6.$$

Câu 6. (1,0 điểm)

- Cho $x, y > 0$ và $x + y \leq 2$. Chứng minh: $\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{x+2y} \geq \frac{2}{3}$.
- Cho $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{x+1} - \frac{9}{2(x+3)}$.

Câu 7. (1,0 điểm) Để kết nối giao thương sau khi sáp nhập hai tỉnh, người ta dự định xây dựng một tuyến đường cao tốc nối từ thành phố A đến thành phố B của hai tỉnh đó. Tuyến đường này phải vượt qua một con sông. Giả sử đoạn sông chảy qua khu vực này có hai bờ song song với nhau và bề rộng mặt sông là 200 mét. Cây cầu bắc qua sông yêu cầu phải được thiết kế vuông góc với bờ sông. Biết rằng, khoảng cách từ thành phố A đến bờ sông gần nhất là 62 km, khoảng cách từ thành phố B đến bờ sông gần nhất là 70 km. Hình chiếu vuông góc của A và B trên cùng một bờ sông cách nhau 55 km. Giả sử người ta xây dựng được cây cầu tại vị trí phù hợp đảm bảo tuyến đường giao thông ngắn nhất đi từ A đến B (bao gồm hai đoạn đường bộ và chiều dài cây cầu). Hỏi tuyến đường đó dài bao nhiêu kilômét?



— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CẦN THƠ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,5 điểm)

a) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$, với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x+2$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = (m+3)x - 3m$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = 5$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Trong một trò chơi, An gieo một con xúc xắc 6 mặt cân đối và đồng nhất hai lần. Lần thứ nhất An gieo được mặt a chấm, lần thứ hai An gieo được mặt b chấm. An sẽ thắng trong trò chơi nếu hai số a, b thỏa mãn đa thức $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 6$ chia hết cho đa thức $(x-2)$. Tính xác suất để An thắng trong trò chơi.

b) Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $(x+y)^2 = x+2$.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AB \cdot AF = AC \cdot AE$.

b) Đường thẳng qua O vuông góc với AO và cắt AB, AC tương ứng tại P, Q . Chứng minh PQ song song với EF .

c) Giả sử $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chứng minh rằng chu vi tam giác HPQ bằng đường kính của đường tròn (O) .

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Một người thợ muốn xây một hồ cá thủy sinh bằng xi măng có dạng hình hộp chữ nhật (không có nắp) có đáy là hình vuông. Yêu cầu đặt ra là thể tích lòng hồ cá phải chứa đúng 4 m^3 nước. Để tổng diện tích bề mặt bên trong (gồm một mặt đáy và bốn mặt bên) nhỏ nhất, người thợ cần thiết kế độ dài cạnh đáy và chiều cao của lòng hồ cá bằng bao nhiêu mét?

b) Một robot được lập trình di chuyển dọc theo trục tọa độ Ox . Ban đầu robot đứng ở điểm gốc tọa độ O (có tọa độ bằng 0). Robot thực hiện liên tiếp 2026 bước di chuyển. Ở bước di chuyển thứ k (với $k = 1; 2; \dots; 2026$), robot có thể tiến về phía trước hoặc lùi về phía sau một khoảng có độ dài đúng bằng k . Hỏi sau 2026 bước di chuyển, robot có thể quay trở lại đúng điểm gốc tọa độ O được không? Vì sao?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
- b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{x\sqrt{x} - 2x + 28}{x - 3\sqrt{x} - 4} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 8}{4 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình $10x^3 - 17x^2 - 7x + 2 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2(x + y) = 0 \\ \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{y^2 + 4y + 3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$
- c) Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m nguyên dương để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $C = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Câu 3. (1,0 điểm)

- a) Bạn Hoa có một cái khoá số gồm 4 chữ số lấy từ các chữ số từ 0 đến 9. Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên một dãy gồm 4 chữ số để đặt làm mã số mở khoá. Tính xác suất của biến cố A: “4 chữ số được chọn liên tiếp nhau và tăng dần”.
- b) Bến Tre (nay là tỉnh Vĩnh Long) là vùng đất nổi tiếng với những vườn dừa xanh tốt và nghề làm kẹo dừa truyền thống. Nghề làm kẹo dừa Bến Tre không chỉ góp phần giữ gìn bản sắc văn hoá địa phương mà còn tạo ra sản phẩm đặc trưng phục vụ du lịch, lễ Tết, hội nghị và xuất khẩu.

Một hộp đựng kẹo dừa Bến Tre có dạng hình hộp chữ nhật, chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 5 cm. Hộp đựng 40 viên kẹo dừa giống nhau được xếp thành 5 hàng theo chiều dài, 4 hàng theo chiều rộng và 2 lớp theo chiều cao (mỗi viên kẹo dừa là một hình hộp chữ nhật), được xếp sát nhau và vừa khít trong hộp. Người ta gói từng viên kẹo bằng một loại giấy đặc biệt, phần giấy gói vừa khít viên kẹo. Hãy tính diện tích giấy gói mỗi viên kẹo.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O với M là một điểm bên trong đường tròn. Vẽ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại M (hai dây cung AB và CD không là đường kính, C thuộc cung nhỏ AB). Qua A kẻ đường thẳng vuông góc BC tại H và cắt đường thẳng DC tại E . Gọi F là điểm đối xứng của C qua AB , tia AF cắt BD tại K , N là giao điểm BF với AD . Chứng minh:

- a) $\triangle AFM$ đồng dạng $\triangle DFK$ và BN vuông góc với AD ;

b) Ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Câu 5. (1,5 điểm)

a) Tìm tổng của tất cả các số nguyên dương x sao cho $A = \frac{x^3 - 4x + 120}{(x - 2)(x + 2)}$ là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 4(x + 2)$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho 2 số thực $a > 2, b > 2$. Chứng minh rằng $\frac{16a^2}{a - 2} + \frac{5b^2}{b - 2} \geq 168$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG THÁP**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát
đề

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x + 3\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A = 3$.

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Bác An đi chợ mua trứng vịt muối hết 120 nghìn đồng. Người bán thấy trứng nhỏ nên đã chủ động cho thêm 4 quả trứng vịt muối. Do đó giá mỗi quả trứng đã giảm đi 1 nghìn đồng. Tìm số trứng vịt muối ban đầu bác An mua.

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy - y^2 = 4(x - y) \\ \sqrt{x - 2} - \sqrt{3y - x + 3} = 1 - x \end{cases}.$$

Bài 3: (3,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m^2 + 1$ (m là tham số).

1. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
2. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + x_2 = 11$.

Bài 4: (2,0 điểm)

Trong hộp gồm 100 lá thăm kích thước như nhau được đánh số từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên một lá thăm trong hộp. Gọi A và B là hai biến cố thỏa A : “Số ghi trên lá thăm chia hết cho 3” và B : “Số ghi trên lá thăm vừa chia hết cho 3 vừa chia cho 5 dư 1”.

1. Tính số kết quả thuận lợi cho biến cố A .
2. Tính xác suất biến cố B .

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho n là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên $(2x - y)(x + y) = n$.

1. Giải phương trình với $n = 5$.
2. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình khi $n = 630$.

Bài 6: (4,0 điểm)

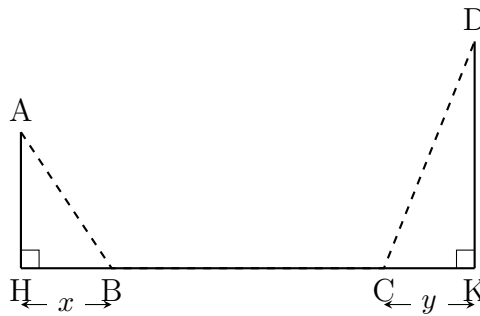
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường trung trực của đoạn thẳng BC cắt đường tròn (O) tại E, F (điểm F thuộc cung nhỏ BC). Gọi D là giao điểm của BC và AF .

1. Chứng minh rằng $FB^2 = FD \cdot FA$.
2. Đường tròn tâm F bán kính FB cắt AF tại I . Gọi H (khác E) là giao điểm của EI và (O) , T là giao điểm của FH và BC . Chứng minh rằng $\widehat{FBH} = \widehat{FTB}$.
3. Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, T cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{TIT} = 90^\circ$.

Bài 7: (2,0 điểm)

Một khu đất hình thang $AHKD$ có $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$, $AH = 1\text{km}$, $DK = 2,4\text{km}$ và $HK = 4,8\text{km}$. Người ta dự định thiết lập một đường bay cho drone như sau: xuất phát từ điểm A bay theo đường gấp khúc $ABCD$ để đến D . Trong đó B và C là hai điểm thay đổi thuộc đoạn thẳng HK . Do địa hình phức tạp, vận tốc bay của drone trên các đoạn thẳng AB, CD và BC lần lượt là 30km/h , 40km/h và 50km/h . (tham khảo hình vẽ)

1. Đặt $HB = x, CK = y$. Hãy thiết lập công thức tính thời gian bay từ A đến D của drone theo x, y .
2. Tìm thời gian bay nhanh nhất của drone.



— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CÀ MAU**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + c = 2b$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 3x + 8 = 4\sqrt{7-x} + 2x\sqrt{4x-3}$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}}.$$

Câu 3. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n và số nguyên tố p thỏa mãn:

$$n^2 + n = p^2 + p - 12.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC . Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm F lên cạnh DE .

1. Chứng minh rằng tứ giác $BDOF$ nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDOF$.

2. Chứng minh $BF \cdot EH = FH \cdot OF$ và HF là tia phân giác của góc BHC .

3. Gọi N là điểm di động trên cung nhỏ EF của đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của N lên các đường thẳng DE và DF . Xác định vị trí của điểm N trên cung nhỏ EF để độ dài đoạn thẳng PQ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. (2,0 điểm) Tại kỳ thi Trại hè Phương Nam năm 2025, ban tổ chức đã thống kê kết quả điểm thi môn Toán của 100 thí sinh đến từ các trường THPT chuyên và không chuyên ở khu vực phía Nam. Kết quả được trình bày trong bảng tần số ghép nhóm dưới đây:

Nhóm điểm số	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]
Tần số	15	30	45	8	2

Căn cứ vào kết quả thi, ban tổ chức xác định mức điểm chuẩn để đạt Huy chương Vàng (HCV) môn Toán là từ 8,0 điểm trở lên. Trong số các thí sinh đạt HCV môn Toán của hội thi, có 4 thí sinh thuộc đơn vị tỉnh Cà Mau.

1. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 1 thí sinh trong số các thí sinh đạt HCV môn Toán của hội thi để phỏng vấn. Tính xác suất để thí sinh được chọn không thuộc đơn vị tỉnh Cà Mau.
2. Trong 4 thí sinh đạt HCV môn Toán của tỉnh Cà Mau, có 2 học sinh thuộc trường THPT Chuyên Bạc Liêu và 2 học sinh thuộc trường THPT Chuyên Phan Ngọc Hiển. Tại lễ bế mạc, ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 4 học sinh này thành một hàng ngang trên sân khấu để nhận giải. Tính xác suất để không có hai học sinh nào cùng trường đứng cạnh nhau.

— HẾT —

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2026 - 2027**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2,0 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{x - 4} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

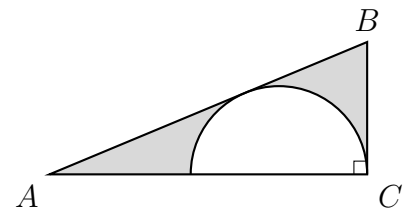
- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tìm x sao cho $A > 1$.

Câu 2. (1,0 điểm): Giải phương trình $\frac{5x}{\sqrt{5x+1}-1} = x+2$.

Câu 3. (1,0 điểm): Cho đa thức $f(x)$ có hệ số thực. Biết khi chia $f(x)$ cho $x-4$ có dư là 10 và khi chia $f(x)$ cho $x-5$ có dư là 8. Khi chia $f(x)$ cho $(x-4)(x-5)$ được thương là $g(x)$ và có dư là $r(x)$. Tìm $r(x)$.

Câu 4. (1,0 điểm):

Cho tam giác ABC vuông tại C có $AB = 13\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$. Một nửa đường tròn có đường kính nằm trên cạnh AC , tiếp xúc với BC tại C và tiếp xúc với AB (tham khảo hình bên). Tính diện tích phần tô đậm trong hình.



Câu 5. (2,5 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $BC = 6\text{ cm}$. Gọi H là điểm nằm trên đoạn thẳng OB (H không trùng với O và B). Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt nửa đường tròn đã cho tại A . Gọi G là trung điểm của AC .

- a) Chứng minh rằng A, G, O, H cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
b) Gọi D là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $HD = HA$. Đường thẳng DH cắt các đường thẳng AB, AO lần lượt tại E, I . Gọi K là giao điểm AH và EC , F là giao điểm AO và BD . Chứng minh rằng: $AE^2 = 2 \cdot EI \cdot HD$ và tam giác AKE đồng dạng với tam giác AFD .
c) Gọi $BH = x$. Tìm x để diện tích của tứ giác $ABKC$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (1,0 điểm): Cho số nguyên tố $p > 5$. Chứng minh rằng $A = 6^p - 5^p - 1$ chia hết cho $5p$.

Câu 7. (1,0 điểm): Bên trong một đường tròn có bán kính bằng 11, cho 7 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm trong 7 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 11.

Câu 8. (0,5 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $x \cdot y \cdot z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}.$$

— HẾT —

3 Các đề tự luyện

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 1

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$(2x - 9)\sqrt{x + 7} + \sqrt{3x - 2} + 2x + 9 = 0$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3y + x^3 + xy + x = 1 \\ 4x^3y^2 + 4x^3 - 8xy - 17x = -8 \end{cases}$$

Câu 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn:

$$4^x + (1 + 3^y)(1 + 7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

b) Có tồn tại không ba số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2007^3?$$

Câu 3. Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E = (3x^2 - 2xy + 3y^2)(3y^2 - 2yz + 3z^2)(3z^2 - 2zx + 3x^2)$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với DF và AI với DE .a) Chứng minh rằng $CM \perp AI$.b) Gọi K là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\triangle KMN$ cân.c) Tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $AS \parallel ID$.**Câu 5.** Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 2024\}$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để trong k phần tử bất kỳ của S luôn tồn tại hai phần tử a, b mà $ab + 1$ là một số chính phương.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 2

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

a. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$$

b. Giải hệ phương trình:

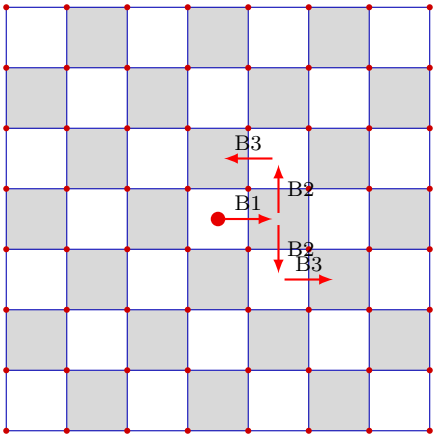
$$\begin{cases} |x-1| = 2 - |3-x| \\ x^3 + xy^2 + 4 = 4x^2 + x + 4y^2 \end{cases}$$

Câu 2.

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.b. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $\sqrt{p^2 + 6pq + 2q^2} + \sqrt{q^2 + 6pq + 2p^2}$ là số nguyên.**Câu 3.** Cho các số thực không âm a, b, c bất kì thỏa mãn không có hai số đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{3abc(a+b+c)+1}{ab+bc+ca} + (a+b+c)^2.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) , H là trực tâm của tam giác. Các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F ; gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BI, CI với EF ; CP, BQ cắt nhau ở K ; AI cắt (O) tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại (O) tại N .a. Chứng minh: N, D, M thẳng hàng và AO, NI cắt nhau trên (O) .b. Đường tròn ngoại tiếp tam giác NOM cắt NI tại L khác N . Chứng minh: OL vuông góc với EF .c. Đường tròn ngoại tiếp tam giác NKO cắt HK tại J . Chứng minh: O, I, J thẳng hàng.**Câu 5.** Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ, theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 3

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1. Giải phương trình:

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 1)\sqrt{x + 3} + (x + 7)\sqrt{x + 10}$$

Câu 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + 3y + 3)\sqrt{xy + 3y} = y(3x + 2y + 9) \\ 4(x - 8)^3 - (x + 15)\sqrt{y - 2} = 20(11 - 4y) \end{cases}$$

Câu 3.

- Tìm tất cả các số nguyên tố (p, q) và số nguyên dương n thỏa mãn: $2^n \cdot p^2 = q^5 - 1$.
- Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{(a^2 + ab + b^2)^2(b + c)} + \frac{b^5}{(b^2 + bc + c^2)^2(c + a)} + \frac{c^5}{(c^2 + ca + a^2)^2(a + b)} \geq \frac{1}{6}$$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , lấy điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $AB = 2AD$, phân giác trong của $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC tại điểm E , đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt AD tại F khác A .

- Chứng minh: CF là phân giác ngoài của $\widehat{BCD}$.
- Gọi M là trung điểm của AE , đường thẳng CD cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC tại điểm K . Chứng minh: Các tam giác EFK, AKM là tam giác cân.
- Đường thẳng FM cắt AB tại G . Chứng minh: $MF = 2MG$.

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước 2×2020 (bảng gồm 2 hàng và 2020 cột). Điền 2020 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng, sao cho ở mỗi ô được điền đúng một số, và tính từ trái qua phải, ở hàng thứ nhất, các số được điền theo thứ tự tăng dần, ở hàng thứ hai, các số được điền theo thứ tự giảm dần. Hỏi trong bảng số thu được, có bao nhiêu cột có tính chất: hai số cùng cột nguyên tố cùng nhau?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 4

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- a) Giải phương trình:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x^2} = x^3\sqrt{1+x^4}$$

- b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1+xy} + \sqrt{1+x+y} = 2 \\ x^2y^2 - xy = x^2 + y^2 + x + y \end{cases}$$

Câu 2.

- a) Tìm các số nguyên dương
- x, y
- thỏa mãn:

$$7y^3 + 3xy(x+3y) = 3(x+y)^2 + 7$$

- b) Cho hai số thực
- a, b
- thỏa mãn
- $\frac{1}{2} \leq a+5b \leq 3$
- và
- $2a^2 + 11ab + 5b^2 + 3 \geq 2a + 10b$
- . Chứng minh rằng:

$$4ab + 11b^2 \leq \frac{35}{9}$$

Câu 3.

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường tròn ω qua A, D tiếp xúc với AC tại A cắt AB tại K ; đường tròn ω' qua A, D tiếp xúc với AB tại A cắt AC tại L .

- a) Chứng minh $DK \perp DF$ và $DL \perp DE$.
- b) Gọi N là trung điểm LK . Chứng minh AN vuông góc với EF .
- c) Vẽ đường kính của ω, ω' là AP và AQ . Gọi M là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng tứ giác $KDML$ nội tiếp.

Câu 4.

- (a) Cho bốn số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi $k = 1, 2, 3, 4$ và tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ có giá trị bằng 0.
- (b) Cho 1000 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với $k = 1, 2, \dots, 1000$ và tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{1000}$ là một số chẵn. Hỏi trong các số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_{1000}$ có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 5

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Giải phương trình:

$$8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2 - y)\sqrt{3 - 2y} \\ \sqrt{x + 2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3 - 2y}} + 1 \end{cases}$$

Câu 2.

1. Tìm
- $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$
- đôi một nguyên tố cùng nhau thỏa mãn

$$(x + y)(y + z)(z + x) : xyz$$

2. Cho các số nguyên dương
- a, b
- với
- $a > b$
- . Biết rằng
- $a^3 - b^3$
- là một ước của
- $ab(a^2 + b^2)$
- . Chứng minh rằng
- $(a - b)^3 > 3ab$
- .

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Gọi P là điểm chính giữa cung BC chứa A trên (O) , D là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC , G là giao điểm khác A của AD với đường tròn (O) , H là giao điểm của PG và ID .

- 1) Chứng minh $KB = KC = KI$ và tứ giác $IBHC$ nội tiếp.
- 2) Gọi N, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$ với các đường thẳng PH, AI . Gọi U là trung điểm của BC . Chứng minh UB là tia phân giác của $\widehat{NUH}$ và ba điểm N, Q, U thẳng hàng.

Câu 4. Trong các ô của bảng vuông kích thước $n \times n$ ô vuông, người ta viết các số sao cho tổng của các số có mặt trong các ô của một “chữ thập” (tức là hình gồm một hàng và một cột) bất kỳ không nhỏ hơn a . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các ô trong bảng.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 6

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{(x+8)^5} + \sqrt[3]{x+8} = \sqrt[5]{(x+32)^3} + \sqrt[5]{x+32} + 24$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$$

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^4 + 2y^3 + 1 = xy^3 + y$$

b) Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6abc}{ab + bc + ca} \geq 5$$

Câu 3. Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn (P không trùng với O). Qua P kẻ hai dây cung AB và CD của (O) . Một đường thẳng d đi qua P cắt các đoạn thẳng AC và BD lần lượt tại M và N .

a) Giả sử $d \perp OP$. Chứng minh rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN .b) Trong trường hợp tổng quát (nghĩa là đường thẳng d không nhất thiết vuông góc với OP), giả sử d cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F (sao cho M nằm giữa E và P). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{PE} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{PF} + \frac{1}{PM}$$

Câu 4. Trên một bàn cờ cỡ $n \times n$ đặt các quân xe thỏa mãn điều kiện sau: Với một ô vuông không có quân xe bất kỳ thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng trên bàn cờ có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân xe.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 7

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + y\sqrt{y} - x\sqrt{x-1} - \sqrt{xy-y} = 0 \\ x^2 - 4xy + 2x + 4y = \sqrt{x-2y-1} + 3 \end{cases}$$

Câu 2.

a) Cho số nguyên tố p và số nguyên dương n . Xét các số nguyên a, b, c thỏa mãn:

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

Chứng minh rằng $a = b = c$.b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

Câu 3. Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O) , đường cao MH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D .

(1) Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$ và ba điểm M, O, D thẳng hàng.(2) Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}}$.

Câu 4. Một khu vực được chia thành lưới 8×8 gồm 64 ô vuông. Một số ô được đặt camera giám sát. Một ô không có camera gọi là được giám sát đầy đủ nếu tổng số camera nằm trên hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 8. Biết rằng mọi ô không có camera đều được giám sát đầy đủ. Hỏi: Có thể có nhiều nhất bao nhiêu ô không có camera?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 8

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

THPT

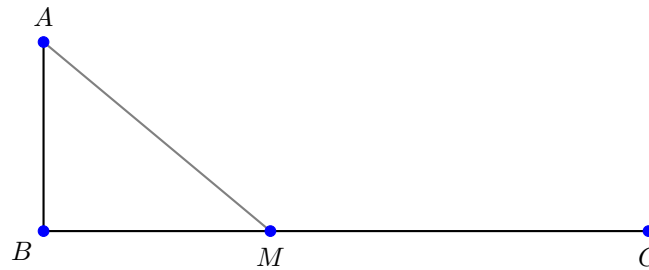
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- a) Mỗi cạnh của một hình vuông được tô màu một cách ngẫu nhiên bởi một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để hai cạnh kề nhau bất kì của hình vuông luôn khác màu.
- b) Trong hình bên, độ dài quãng đường AB là 5 km, độ dài quãng đường BC là 26 km, $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Một người có kế hoạch đi xe đạp, người đó đi thẳng từ A đến vị trí M trên đoạn thẳng BC với tốc độ 12 km/h, sau đó đi thẳng từ M đến C với tốc độ 13 km/h. Người đó cần chọn vị trí điểm M cách điểm B một khoảng bằng bao nhiêu km để tổng thời gian đi từ A đến M và từ M đến C là ít nhất?



Câu 2.

- a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$
- b) Tìm tất cả các đa thức thỏa mãn điều kiện $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P(1) = 1; \quad P(2) = 2; \quad P(3) = 4$$

Câu 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB . Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác D và cắt BC tại G . Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N .

- a) Chứng minh tam giác OMN cân.
- b) Gọi I là trung điểm của DE , OA cắt BC tại K . Chứng minh: $IE^2 = IA \cdot IG$.
- c) Tia BE cắt AC ở H . Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG .

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = -2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 5.

- a) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.
- b) Gọi $X = \{1, 2, \dots, 2003\}$. Lấy số tự nhiên $n \geq 1$ và $n \leq 2003$ sao cho nếu lấy tập hợp con gồm n phần tử của X , thì ta có thể tìm được một phần tử là lũy thừa của 2 hoặc 2 phần tử có tổng là lũy thừa của 2. Chứng minh rằng: $n \geq 999$.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 9

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

a) Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số là các số nguyên và $P(17) = 10$; $P(24) = 17$. Biết a, b là hai số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = a + 3$ và $P(b) = b + 3$. Tính giá trị của biểu thức ab .

b) Giải phương trình:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{2\sqrt{x^2+7x+1}}{x+1}$$

Câu 2. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn tính chất sau:

a) $n! \vdots (n^2 + 1)$

b) $n^2 + 1 \nmid n!$

Câu 3. Với các số thực không âm $a; b; c$ sao cho $a + b + c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3}$$

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định không đi qua tâm O . Điểm A di động trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt $(O; R)$ tại hai điểm P và Q (điểm F nằm giữa hai điểm P và E). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh:

a) $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc một đường tròn (ω) .

c) Tâm I của đường tròn (ω) chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 5. Xét bảng $2 \times n$ với n nguyên dương. Trong mỗi ô vuông của bảng có đúng một viên bi. Mỗi lần người ta chọn ra hai ô vuông có chứa bi rồi chuyển từ mỗi ô vuông đó một viên bi sang ô vuông kề với nó (ô kề là ô có chung cạnh). Tìm tất cả các giá trị có thể của n để có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng một ô sau hữu hạn các thao tác.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 10

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$$

- b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x = y^3 + 3y^2 + 4y + 2 \\ \sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{y+12-6\sqrt{y+3}} = 1 \end{cases}$$

Câu 2. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x + y + z)$.

- a) Chứng minh rằng $x + y + z$ chia hết cho 6.
b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Dựng đường cao AD của tam giác và đường kính AK của (O) . Hạ BE, CF lần lượt vuông góc với AK .

- a) Chứng minh rằng: $ABDE, ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh rằng: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ và $DF \perp AB$.
c) Cho BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Chứng minh rằng: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

Câu 4. Một miếng phô mai nặng 1kg được cắt thành $n \geq 4$ miếng, mỗi miếng nặng dưới 600g. Biết rằng không thể chia các miếng này thành hai đồng sao cho khối lượng mỗi đồng thuộc đoạn $[400; 600]$ (mỗi đồng có thể gồm một hoặc nhiều miếng). Chứng minh rằng tồn tại ba miếng mà tổng khối lượng của hai miếng bất kỳ trong ba miếng đó đều lớn hơn 600g.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 11

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{a + 2(\sqrt{bc} - 1)} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{b + 2(\sqrt{ac} - 1)} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c + 2(\sqrt{ab} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

- b) Trong một buổi sinh hoạt tập thể, một trường trung học cơ sở có 2026 học sinh tham gia. Nhà trường chuẩn bị hai loại ghế dài để xếp chỗ ngồi: Ghế loại I: mỗi ghế ngồi được 5 học sinh; Ghế loại II: mỗi ghế ngồi được 8 học sinh. Biết rằng toàn bộ 2026 học sinh đều được xếp ngồi vừa đủ, không thừa chỗ, không thiếu chỗ. Hỏi nhà trường cần bố trí số ghế mỗi loại là bao nhiêu để tổng số ghế là nhỏ nhất.

Câu 2.

- a) Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .
- b) Xác định tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho tồn tại các số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{p} \quad \text{và} \quad a + b + c = p(q + 1)$$

Câu 3. Xét các số nguyên dương m, n với $n > m$. Chứng minh rằng:

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > 2m\sqrt{n}$$

(Trong đó $[x, y]$ ký hiệu bội chung nhỏ nhất của x và y)

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi $a, b > 0$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}$$

Câu 5. Xét tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 50\}$. Hỏi có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu phần tử của S để trong các phần tử được chọn ra không tồn tại hai phần tử x, y mà:

- a) $|x - y| = 4$
- b) $|x - y| \in \{4, 7\}$

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng qua O vuông góc với AO cắt AB, AC lần lượt tại K, L .

- Chứng minh rằng $EF \parallel KL$.
- Chứng minh rằng $OK + KH = OL + LH$.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 12

(Đề thi có 02 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT**

NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn:

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x + y}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Câu 2.

1. Cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2; 2), B(4; 8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m thỏa mãn $-2 < m < 4$. Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.
2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \\ \sqrt{2x + 3} + \sqrt{2y} + 2x^2 + x = 26 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 7^y = 1$.
2. Cho các số nguyên dương a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

3. Viết lên bảng bốn số $1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}$. Ở mỗi lần thực hiện, ta xóa đi 4 số a, b, c, d hiện có trên bảng và viết vào 4 số mới lần lượt là:

$$a + \frac{1}{bcd}, \quad b + \frac{1}{cda}, \quad c + \frac{1}{dab}, \quad d + \frac{1}{abc}$$

Hỏi có thể thực hiện thao tác này cho đến khi trên bảng gồm 4 số hữu tỉ hay không? Vì sao?

Câu 4. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua tâm. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng qua O vuông góc với phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt AB, AC lần lượt tại P và Q . Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại J và K (K khác A).

1. Chứng minh tứ giác $APKQ$ là hình thoi.
2. Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của đường thẳng AK với EF . Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua N vuông góc với EF và đường thẳng qua J vuông góc với BC . Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.
3. Giả sử bán kính đường tròn (O) có độ dài bằng R . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $DE + DF + EF$.

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4 - a^3 + ab + 2}} + \frac{1}{\sqrt{b^4 - b^3 + bc + 2}} + \frac{1}{\sqrt{c^4 - c^3 + ca + 2}} \leq \sqrt{3}$$

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 13

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = -2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^{2025}} + \frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{z^{2025}} = \frac{1}{(x+y+z)^{2025}}$.

2. Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x + 2$ thì được dư là -15 , khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - 3$ thì được dư là 20 . Tính giá trị của biểu thức $A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} + c^{2025})(c^{2025} + a^{2025})$.

Câu 2.

1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} = 2x$$

2. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h. Sau khi xe máy xuất phát được một thời gian thì một xe ô tô cũng xuất phát từ A với vận tốc 60 km/h và nếu không có gì thay đổi thì xe ô tô sẽ đuổi kịp xe máy tại B. Sau khi xe ô tô đi được nửa quãng đường AB thì nó tăng vận tốc mỗi giờ thêm 15 km nên đã đến B sớm hơn xe máy 6 phút. Tính quãng đường AB.

Câu 3.

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , M là điểm nằm trên cung nhỏ AB của (O) , kí hiệu c_1 là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Các tiếp tuyến qua M của c_1 cắt AB, CD lần lượt tại P, Q . Gọi E, F là các tiếp điểm của MP, MQ với c_1 , các đường thẳng MP, MQ cắt AD lần lượt tại S, T ; H là giao điểm của PT, QS .

- (a) Chứng minh $OEMF$ là hình vuông và OH vuông góc với AD .
(b) Chứng minh đường thẳng qua O vuông góc với PQ chia đôi đoạn thẳng ST .
- Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 4xy + 7y^2 + 6x - 12y + 8 = 0$.

Câu 4.

- Quả bóng đá theo tiêu chuẩn FIFA (Liên đoàn bóng đá thế giới) có dạng hình cầu với bán kính bằng 11 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đá (lấy $\pi = 3,14$).
- Cho 2 số hữu tỉ a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$. Chứng minh rằng $\sqrt{a} - 1$ là bình phương của 1 số hữu tỉ.

Câu 5.

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$2 + \frac{1}{3}(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq abc(a + b + c)$$

2. Cho 80 chi tiết được đánh số thứ tự từ 1 đến 80. Người ta lấy ra 50 chi tiết bất kì trong số chúng. Chứng minh rằng trong 30 chi tiết còn lại, luôn tồn tại 2 chi tiết có số thứ tự cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 14

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x - \sqrt{x - 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

2. Cho các số thực
- a, b, c
- khác 0 thỏa mãn
- $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$
- . Tính giá trị biểu thức:

$$P = \left(\frac{a+b}{c} - 1 \right) \left(\frac{b+c}{a} - 1 \right) \left(\frac{c+a}{b} - 1 \right)$$

Câu 2.

1. Cho $P(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên, bậc dương. Biết $P(x)$ có một nghiệm là $x_1 = 3 - \sqrt{2}$. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 6x + 7$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{z + x^2} + \frac{y^3}{x + y^2} + \frac{z^3}{y + z^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Câu 3.

1. Tìm tất cả các số nguyên dương
- x, y
- thỏa mãn:

$$16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$$

2. Với mỗi số thực
- x
- , kí hiệu
- $[x]$
- là số nguyên lớn nhất không vượt quá
- x
- .

- a) Chứng minh rằng $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 = [x + 1]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- b) Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 840$ thỏa mãn $[\sqrt{n}]$ là ước của n .

Câu 4.

Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm M nằm trong (O) ($M \neq A, B$), phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt (O) tại N , phân giác ngoài của $\widehat{AMB}$ cắt NA, NB lần lượt tại P, Q . Đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính PN tại S , đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R , đường thẳng qua R song song với PQ cắt NA tại C , đường thẳng qua S song song với PQ cắt NB tại D .

1. Chứng minh: $\widehat{BNS} = \widehat{CNR}$.
2. Chứng minh: $AB \parallel CD$.
3. Gọi I là giao điểm của DC, RS . Chứng minh: N, O, I thẳng hàng.

Câu 5.

Trên bảng viết một số nguyên dương n ($n \geq 3$). Hai bạn Lâm và Ngân chơi một trò chơi như sau: hai người lần lượt thực hiện lượt chơi của mình bằng cách xoá một số xuất hiện trên bảng và thay bởi hai số nguyên dương có tổng bằng nó. Người thắng cuộc là người sau khi kết thúc lượt chơi của mình mà trên bảng chỉ có các số 1 hoặc 2. Lâm là người chơi trước.

1. Chứng minh Lâm có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 6$ và Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 7$.
2. Chứng minh rằng Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 2025$.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 15

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- a) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(\sqrt{x^2 + 2} - x)(y + \sqrt{y^2 + 2}) = 2$. Chứng minh rằng $x = y$.
- b) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh rằng $a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} > 1$.

Câu 2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} (x+3)\sqrt{y^2+8y+20} + (y+4)\sqrt{x^2+6x+10} = 0 \\ 4(x+5)^2 + 6y + 11 = 3\sqrt[3]{2y+5} \end{cases}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , tia phân giác góc A cắt (O) tại K khác A . Trên cạnh BC lấy G sao cho $HG \parallel AK$, gọi N là giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (O) .

- a) Gọi P là giao điểm của DE, CN . Chứng minh rằng: Tam giác DFP cân.
- b) Chứng minh rằng: N, G, K thẳng hàng.

Câu 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn:

$$25^x + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4)5^y.$$

Câu 5. Cho một bảng kẻ ô vuông 2026×2026 và một hộp đựng k viên sỏi (k là số nguyên dương). Gọi (i, j) là ô nằm ở hàng thứ i và cột thứ j , với $1 \leq i, j \leq 2026$ (ở đây, ô $(1, 1)$ là ô nằm ở góc trên cùng bên trái).

Ban đầu bảng không có sỏi. Ta được phép lấy từ hộp một viên sỏi đặt vào một ô trống (i, j) nếu ô này thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $j = 1$ hoặc ô $(i, j - 1)$ có sỏi.
- $i = 2026$ hoặc ô $(i + 1, j)$ có sỏi.

Ngoài ra, ta được phép lấy một viên sỏi bất kỳ trên bảng rồi bỏ vào hộp. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu để có thể đạt được trạng thái là ô $(1, 2026)$ có sỏi?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 16

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- 1) Giải phương trình sau:

$$2x^2 + x + \sqrt{x^2 + 3} + 2x\sqrt{x^2 + 3} = 9$$

- 2) Cho
- a, b, c
- là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn
- $(a^2 + 1)(b + c) = (b^2 + 1)(c + a) = -10$
- .
-
- Tính giá trị của biểu thức
- $P = (a + b)(b + c)(c + a)$
- .

Câu 2.

- 1) Một tiệm bánh ngọt dự định sản xuất hai loại bánh cho một đơn hàng. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 40 g và 60 g. Lợi nhuận thu được khi bán mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 12 nghìn đồng và 15 nghìn đồng. Biết rằng tiệm chỉ còn 14 kg đường để làm bánh và tiệm phải làm ít nhất 80 chiếc bánh loại I và 100 chiếc bánh loại II. Hỏi tiệm nên làm bao nhiêu chiếc bánh mỗi loại để lợi nhuận thu được là lớn nhất?
- 2) Với a, b, c là ba số nguyên dương, xét hai phương trình bậc hai sau đây:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{và} \quad ax^2 + bx - c = 0$$

Giả sử hai phương trình trên có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng abc chia hết cho 30.

Câu 3. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a(1-b)}{3-a} + \frac{b(1-c)}{3-b} + \frac{c(1-a)}{3-c}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . Gọi I là trung điểm AD ; gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB . Các đường thẳng BF, CE cắt nhau tại điểm K , đường thẳng AK cắt BC tại L . Gọi H là chân đường cao hạ từ K lên BC , M là trung điểm của HK .

- 1) Chứng minh: $BD = CL$.
- 2) Chứng minh: $4S_{ABC} = 3S_{KBC}$.
- 3) Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D lên AB, AC . Chứng minh: PQ vuông góc với DM .

Câu 5.

- 1) Tồn tại hay không số nguyên dương n để $2n - 1, 5n - 1, 13n - 1$ đồng thời là số chính phương.
- 2) Cho chín điểm trên mặt phẳng, cứ bất kỳ ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà cạnh được tô xanh hoặc tô đỏ, trong đó bao giờ cũng có cạnh đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tứ giác có các cạnh và các đường chéo cùng tô màu đỏ.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 17

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = abc$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b}(c + a) + \frac{b}{c}(a + b) + \frac{c}{a}(b + c).$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3xy - 2)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x^2 - 3xy^2 = y(y - 2) \end{cases}$$

Câu 2.

1. Cho đa thức $f(x) = a^{2026}x^2 + bx + a^{2026}c - 1$, với a, b, c là các số nguyên. Giả sử rằng phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{(f(1))^2 + (f(-1))^2}{2}$ là hợp số.
2. Với p là số nguyên tố lẻ, đặt $A = 23p + 3^p - 4$. Chứng minh rằng:
- A không phải là bình phương của bất kì số tự nhiên nào.
 - A không phải là tích của bất kì hai số nguyên dương liên tiếp nào.

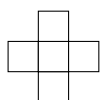
Câu 3. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+2)}{2a^2+1} + \frac{b(b+2)}{2b^2+1} + \frac{c(c+2)}{2c^2+1} \geq 0$$

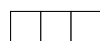
Câu 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, không cân và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M, N, I tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF, AH . Các đường thẳng AH, BC theo thứ tự cắt đường thẳng EF tại J, S .

- Chứng minh rằng $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SJ \cdot SN$.
- Chứng minh rằng J là trực tâm của tam giác IBC .
- Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC . Chứng minh rằng $\widehat{BIP} = \widehat{CIM}$.

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước $n \times n$ và hai loại miếng ghép hình "dấu cộng", "dấu trừ" như hình dưới đây. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép, các miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép "dấu trừ" có thể xoay 90° .



Dấu cộng



Dấu trừ

1. Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n = 6$.
2. Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n \times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép đã cho.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 18

(Đề thi có 02 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028**

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Giải phương trình: $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn:

$$a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b).$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$.

Câu 2.

1. Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 = 2xy(x-2y) + 5$.

2. Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn số $m^2 - mn + 4n^2$ chia hết cho 25. Chứng minh số $m^2 + mn + 4n^2$ cũng chia hết cho 25.

Câu 3.

1. Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a^3b^3}{a^4+b^4}$ là số nguyên dương không có ước nguyên tố vượt quá 3. Chứng minh rằng $a = b$.

2. Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x+y+z).$$

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là D . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là S .

1. Chứng minh tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS .

2. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS . Đường thẳng BJ cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là T . Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS .

3. Các đường cao DE, BF và CK của tam giác BCD đồng quy tại H . Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng KF . Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Câu 5. Dãy nhị phân là các dãy số chỉ bao gồm các số 0 và 1, ví dụ như các dãy 0100, 11000, 11. Mỗi lần ta được phép thực hiện một trong các thao tác sau:

1. Đổi 010 thành 1

2. Đổi 1 thành 010

3. Đổi 110 thành 0

4. Đổi 0 thành 110

Liệu ta có thể biến đổi được dãy $100 \dots 0$ gồm 2003 số 0 thành dãy $00 \dots 01$ gồm 2003 số 0 và một số 1 hay không? Tại sao?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 19

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$.

2) Cho $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ với $x \neq 0, x \neq -1$. Tính giá trị biểu thức:

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$$

Câu 2. Cho số nguyên dương n có tất cả k ước số dương là $d_1 < d_2 < \dots < d_k$. Giả sử

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k + k = 2n + 1$$

Chứng minh rằng $2n$ là một số chính phương.

Câu 3.

1) Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11)$$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ và $2a + 3b + 4c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N .

1) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD} = \widehat{AHN}$.

2) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M . Gọi Q là giao điểm của BC và HK , đường thẳng EF cắt QM tại P . Chứng minh $\triangle BPC$ vuông.

Câu 5. Xét một nhóm n người với n nguyên dương và $n \leq 475$. Hai người bất kì trong nhóm quen nhau hoặc không quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương $m \geq 10$ sao cho có thể chia nhóm này thành m nhóm nhỏ phân biệt, đánh số từ 1 đến m sao cho mỗi người ở nhóm i quen với đúng j người ở nhóm j với mọi i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$. Tính giá trị lớn nhất có thể có của n .

— HẾT —

thi
.....

ĐỀ SỐ 20
(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $3a^2 + 5ab - 2b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3a - 2b}{2a + b}$.
2. Cho đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số nguyên. Biết $Q(x)$ có một nghiệm là $x_0 = \sqrt{3}$ và $Q(1) = 4$, tính giá trị $Q(-2)$.

Câu 2.

1. Một công ty X áp dụng chính sách trả lương cho nhân viên theo hai mức: ngày làm việc bình thường và ngày làm việc đặc biệt (làm vào ngày được nghỉ), biết rằng tiền lương của một ngày làm việc đặc biệt nhiều hơn tiền lương của một ngày làm việc bình thường là 225 nghìn đồng. Trong một tháng, anh Bình là nhân viên của công ty X làm việc 24 ngày, trong đó có một số ngày làm việc đặc biệt. Bình nhận được 9 triệu đồng cho những ngày làm việc bình thường và 2,7 triệu đồng cho những ngày làm việc đặc biệt. Hỏi anh Bình được nhận bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi ngày làm việc đặc biệt?
2. Giải phương trình:

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}}$$

Câu 3.

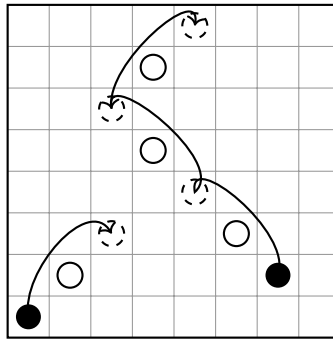
1. Cho tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 20\}$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S . Tính xác suất để chọn được hai phần tử mà tích hai phần tử đó chia hết cho 6.
2. Tìm tất cả bộ ba số nguyên không âm (m, n, k) thỏa mãn điều kiện:

$$k^2 - k + 4 = 5^m(2 + 10^n)$$

Câu 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Xét dây cung CD không đi qua O , không vuông góc với AB và CD cắt AB tại I . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AC và AD .

1. Chứng minh hai tam giác IHK và BCD đồng dạng.
2. Chứng minh $S_{\triangle ACD} > 4S_{\triangle HIK}$.
3. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt CD tại T . Hai đường thẳng BC và BD cắt tia TO lần lượt tại E và F , AF cắt (O) tại P , AE cắt (O) tại Q . Chứng minh tứ giác $CDPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 5. Trong một lưới vuông 8×8 , người chơi có thể di chuyển quân cờ đen nhảy qua một quân cờ trắng theo đường chéo vào một ô trống liền kề để ăn quân cờ đó như hình dưới đây.



Một lượt chơi, người chơi có thể ăn nhiều các quân cờ trắng bằng những bước nhảy liên tiếp, mỗi bước ăn một quân cờ. Hỏi có tối đa bao nhiêu quân cờ trắng mà người chơi có thể ăn trong một lượt chơi?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 21

(Đề thi có 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- 1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{3}{2}$, tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{x^2 - y^2}{(x+z)(y+z)} + \frac{y^2 - z^2}{(y+x)(z+x)} + \frac{z^2 - x^2}{(z+y)(x+y)}$$

- 2) Một con Robot di chuyển trên một đường thẳng, nó được lập trình di chuyển tự động như sau: Ở vị trí xuất phát, khi có hiệu lệnh, Robot sẽ bước 8 bước, mỗi bước nó sẽ ngẫu nhiên tiến về phía trước 1 m hoặc lùi về phía sau 1 m với xác suất như nhau. Sau đó Robot dừng lại. Gọi A là biến cố: “Khi Robot dừng lại nó cách vị trí xuất phát xa hơn 4 m”. Xác suất của biến cố A bằng $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$), biết $\frac{a}{b}$ là một phân số tối giản. Tính $a + b$.

Câu 2.

- Tìm tất cả các bộ số (a, b, c) là ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a^2 - 3a + b + c$, $b^2 - 3b + c + a$, $c^2 - 3c + a + b$ đều là các số chính phương.
- Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn trong các số:

$$x - \sqrt{2}, \quad x^2 + 2\sqrt{2}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad x - \frac{1}{x}$$

có đúng một số không nguyên.

Câu 3.

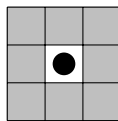
- Cho đa thức $f(x)$ có hệ số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.
- Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{12}$$

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .
- Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
- Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.

Câu 5. Có thể đặt tối đa bao nhiêu quân vua vào bàn cờ 12×12 sao cho mỗi quân vua có thể ăn được đúng một quân vua khác trong một nước đi? Quân vua trong một nước có thể di chuyển đến một trong 8 ô xung quanh như hình dưới đây.



— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 22

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- Một tổ học sinh gồm có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ tổ đó để tham gia đội tình nguyện. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nam.
- Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn $P(8) - P(5) = 2025$. Chứng minh rằng $P(12) - P(9)$ là một số lẻ.

Câu 2.

- Cho $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + xy - 1 : xy + x + y + 1$. Chứng minh rằng: $x^4 + y^9 : y + 1$.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p để $1 + 2^p + 3^p$ là số chính phương.

Câu 3.

- Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

- Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a^2 + b^2 + 1 : ab$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

Câu 4.

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Đường thẳng MN cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB , Q thuộc cung nhỏ AC). Lấy điểm D thuộc cạnh BC ($D \neq B, C$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I ($I \neq B$). Đường thẳng DI cắt AC tại K .

- Chứng minh tứ giác $AIPK$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $\frac{PK}{PD} = \frac{QB}{QA}$.
- Gọi CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G ($G \neq P$). Đường thẳng IG cắt BC tại E . Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước 10×10 ban đầu có 100 ô trắng. Mỗi lần biến đổi, ta được phép đổi toàn bộ màu của các ô thuộc một hàng hoặc một cột (Trắng thành Đen, Đen thành Trắng). Biết tổng số ô đen sau n bước là một số chính phương khác 0. Tìm n .

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 23

(Đề thi có 01 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028**

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

- Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{6} - 6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
- Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng: $(d_1) : y = x + 2$; $(d_2) : y = -2x - 1$ và $(d_3) : y = (2m - 1)x + 3 - m$ đồng quy.

Câu 2.

- Giải phương trình sau:

$$\sqrt{4x^2 - 14x + 16} + 1 = x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

- Tìm tất cả các số nguyên tố p và số nguyên dương n sao cho:

$$p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$$

Câu 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

- Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.
- Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC . Gọi S là giao điểm thứ hai khác A của đường thẳng AH và đường tròn (O) . Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K . Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Câu 4.

- Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x > y$ và $(x - y, xy + 1) = (x + y, xy - 1) = 1$. Chứng minh rằng: $(x + y)^2 + (xy - 1)^2$ không phải là số chính phương.
- Xét x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + zx - 2xyz$$

Câu 5. Tồn tại hay không tập hợp A gồm hữu hạn các số thực dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

- A có ít nhất hai phần tử.
- Với mọi $a, b \in A, a \neq b$ thì $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \in A$.

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 24

(Đề thi có 02 trang)

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT
NĂM HỌC 2027 - 2028**

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1

1. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $xy + x + y = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = 2x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} + 2y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

2. Cho $f(x)$ là đa thức bậc 3 với hệ số của hạng tử có bậc cao nhất là 1, thỏa mãn điều kiện $f(2023) = 2024$ và $f(2024) = 2025$. Tính giá trị của biểu thức $Q = -3f(2025) + f(2026)$.

Câu 2

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3y} = \frac{x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ 2(2x + \sqrt{y}) = \sqrt{2x + 6} - y \end{cases}$$

2. Một chiếc quạt giấy khi mở hết mức ra có góc ở tâm là 150° , bán kính chiếc quạt 30 cm và bán kính phần nan quạt không dán giấy là 5 cm. Giả sử khi dán giấy làm quạt, người ta phải dán đủ hai mặt và phải dư thêm 10% diện tích giấy để dán các mép và làm quạt đẹp hơn, hãy tính diện tích giấy cần thiết để dán quạt nói trên (Lấy $\pi \approx 3,14$ và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3 Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ D lên EF , đường thẳng qua M song song với AB cắt DF tại P , đường thẳng qua M song song với AC cắt DE tại Q .

- Chứng minh: 4 điểm D, E, M, P nằm trên một đường tròn.
- Gọi K là giao điểm của AD với PQ . Chứng minh: $KP = KQ$.
- Gọi H là giao điểm của EP, FQ , N là giao điểm của AM với BC , L là giao điểm của IN, HD . Chứng minh: KL vuông góc với BC .

Câu 4

- Tìm tất cả các số nguyên dương x, y để biểu thức $8x^3 + y^3 - 6xy + 1$ là số nguyên tố.
- Xét dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$. Với mỗi số tự nhiên n , đặt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n trong khoảng $[s_n, s_{n+1})$ tồn tại ít nhất hai số chính phương.

Câu 5

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + 2025}{a^3(b+c)} + \frac{b^2 + 2025}{b^3(c+a)} + \frac{c^2 + 2025}{c^3(a+b)}$$

2. Cho một lưới ô vuông kích thước 24×24 , ban đầu tất cả các ô đơn vị đều được tô màu trắng. Một *nước đi* bao gồm việc chọn một hàng hoặc một cột, rồi thay đổi màu của tất cả các ô đơn vị trong hàng hoặc cột đó (từ trắng sang đen, và từ đen sang trắng). Hỏi sau một số hữu hạn nước đi, liệu lưới có thể chứa đúng 574 ô đơn vị màu đen hay không?

— HẾT —

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

.....

ĐỀ SỐ 25

(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT

NĂM HỌC 2027 - 2028

MÔN THI: TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian
phát đề

Câu 1.

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2026$$

2. Một hộp đựng 4 bi xanh và 6 bi đỏ. Ta lần lượt rút 2 viên bi. Tính xác suất để rút được một bi xanh và một bi đỏ.

Câu 2.

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$$

2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}$$

Câu 3.

1. Một số nguyên dương m được gọi là “số lệch đẹp” nếu tồn tại số nguyên n sao cho

$$m^2 = (2n-1)(2n-4) + 18.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của $|m-n|$.

2. Cho p là một số nguyên tố và n là số nguyên dương nhỏ nhất, lớn hơn 1, sao cho $n^6 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số $(n+1)^6 - 1$ hoặc $(n+2)^6 - 1$ chia hết cho p .

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < CA$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với D khác A .

- a) Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.
b) Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với P khác A . Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với Q khác A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.
c) Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

Câu 5. Cho 40 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ và $b_1, b_2, \dots, b_{21}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{19} \leq 200, \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{21} \leq 200. \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại bốn số a_i, a_j, b_k, b_p ($i < j, k < p$) sao cho $a_j - a_i = b_p - b_k$.

— HẾT —

4 Đáp án các đề tự luyện

ĐỀ 1

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$(2x - 9)\sqrt{x + 7} + \sqrt{3x - 2} + 2x + 9 = 0$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3y + x^3 + xy + x = 1 \\ 4x^3y^2 + 4x^3 - 8xy - 17x = -8 \end{cases}$$

a, Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$. Dùng máy tính cầm tay ta biết được nghiệm của phương trình nên ta có biến đổi để xuất hiện nhân tử chung $(x - 2)$:

$$(2x - 9)(\sqrt{x + 7} - 3) + (\sqrt{3x - 2} - 2) + 8x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{2x - 9}{\sqrt{x + 7} + 3} + \frac{3}{\sqrt{3x - 2} + 2} + 8 \right] = 0$$

Với $x \geq \frac{2}{3}$, ta có $\frac{2x - 9}{\sqrt{x + 7} + 3} > \frac{2(2/3) - 9}{3 + 3} = -\frac{23}{18} \approx -1.27$. Do đó, biểu thức trong ngoặc vuông luôn lớn hơn 0 (vì $-1.27 + 0 + 8 > 0$). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. $\square$

b, Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm. Chia cả hai vế của (1) cho x ta được: $(x^2 + 1)(y + 1) = \frac{1}{x} \Rightarrow y + 1 = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$. Thay $y = \frac{1}{x(x^2 + 1)} - 1$ vào phương trình (2) và chia cả hai vế cho x :

$$4x^2(y^2 + 1) - 8y - 17 = -\frac{8}{x}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 \left[\left(\frac{1}{x(x^2 + 1)} - 1 \right)^2 + 1 \right] - 8 \left(\frac{1}{x(x^2 + 1)} - 1 \right) - 17 = -\frac{8}{x}$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được phương trình theo $t = x^2 + 1$ ($t \geq 1$):

$$\frac{4}{t^2} + 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{t^2} + 8(t - 1) - 9 = 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 17t^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(8t^2 - t - 2) = 0$$

Vì $t \geq 1$ nên $8t^2 - t - 2 > 0$. Do đó $t = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

- Với $x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1(1 + 1)} - 1 = -\frac{1}{2}$.
- Với $x = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{-1(1 + 1)} - 1 = -\frac{3}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$. $\square$

Câu 2.

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn:

$$4^x + (1 + 3^y)(1 + 7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

b) Có tồn tại không ba số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2007^3?$$

a, Ta biến đổi phương trình về dạng phương trình bậc hai với ẩn là 2^x . Khai triển về trái:

$$(1 + 3^y)(1 + 7^y) = 1 + 3^y + 7^y + 3^y \cdot 7^y.$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(2^x)^2 - 2^x(3^y + 1 + 7^y + 1) + (3^y + 1)(7^y + 1) = 0$$

Đặt $A = 3^y + 1$ và $B = 7^y + 1$, phương trình có dạng:

$$(2^x)^2 - (A + B) \cdot 2^x + AB = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - A)(2^x - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3^y + 1 & (1) \\ 2^x = 7^y + 1 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1): $2^x = 3^y + 1$

- Nếu $y = 1 \Rightarrow 2^x = 3^1 + 1 = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn).
- Nếu $y \geq 2$: - Nếu y là số chẵn, đặt $y = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), khi đó $3^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$. Suy ra $3^y + 1 \equiv 2 \pmod{8}$. Để $2^x \equiv 2 \pmod{8}$ thì chỉ có $2^x = 2^1$, dẫn đến $x = 1, y = 0$ (loại). - Nếu y là số lẻ, đặt $y = 2k + 1$, khi đó $3^y + 1 = 3 \cdot 9^k + 1 \equiv 3 \cdot 1^k + 1 \equiv 4 \pmod{8}$. Để $2^x \equiv 4 \pmod{8}$ thì chỉ có $2^x = 2^2$, dẫn đến $x = 2, y = 1$ (đã xét).

Xét phương trình (2): $2^x = 7^y + 1$

- Nếu $y = 1 \Rightarrow 2^x = 7^1 + 1 = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn).
- Nếu $y \geq 2$: - Nếu y là số chẵn, tương tự $7^y + 1 \equiv (-1)^y + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Để $2^x \equiv 2 \pmod{4}$ thì $x = 1$, khi đó $2^1 = 7^y + 1 \Rightarrow y = 0$ (loại). - Nếu y là số lẻ và $y > 1$. Ta có $7^y + 1 = (7 + 1)(7^{y-1} - 7^{y-2} + \dots + 1) = 8 \times (\text{số lẻ})$. Để $2^x = 8 \times (\text{số lẻ})$ là một lũy thừa của 2 thì số lẻ đó phải bằng 1. Điều này chỉ xảy ra khi $y = 1$.

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $(2; 1)$ và $(3; 1)$. □

b, Xét số dư của một số chính phương khi chia cho 8. Một số nguyên k bất kỳ luôn có dạng $4m, 4m \pm 1, 4m \pm 2$. Bình phương lên ta có: $k^2 \equiv \{0, 1, 4\} \pmod{8}$. Khi cộng ba số chính phương lại, ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \pmod{8} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Như vậy, tổng bình phương của ba số nguyên không bao giờ chia cho 8 dư 7. Mặt khác, xét về phải: $2007 \equiv 7 \equiv -1 \pmod{8}$. $\Rightarrow 2007^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \equiv 7 \pmod{8}$. Vì về trái không thể dư 7 mà về phải dư 7 khi chia cho 8 nên không tồn tại bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn. □

Câu 3. Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E = (3x^2 - 2xy + 3y^2)(3y^2 - 2yz + 3z^2)(3z^2 - 2zx + 3x^2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử z là số nhỏ nhất trong x, y, z .

Khi đó ta có $3x^2 - 2xz + 3z^2 \leq 3x^2 - 2xz + 3xz = x(3x + z)$. Tương tự, $3y^2 - 2yz + 3z^2 \leq y(3y + z)$. Suy ra $E \leq xy(3x^2 - 2xy + 3y^2)4(3x + z)(3y + z)$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

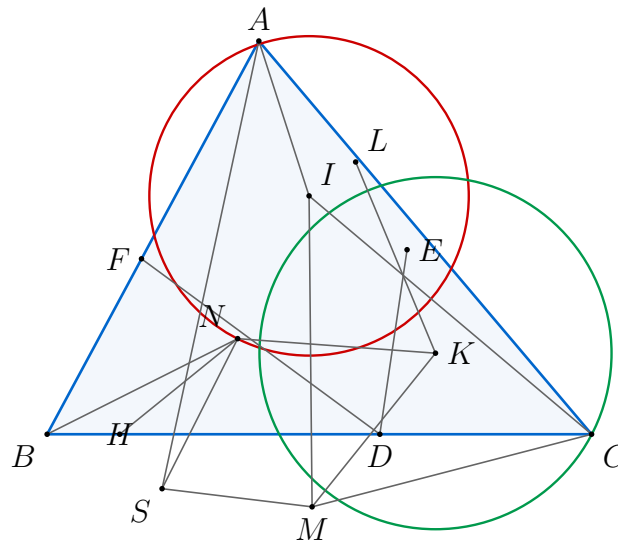
$$\begin{aligned} 27 \cdot 36^2 E &\leq 27 \cdot 36xy \cdot 9(3x^2 - 2xy + 3y^2) \cdot 4(3x + z)(3y + z) \\ &\leq [36xy + 9(3x^2 - 2xy + 3y^2) + 4(3x + z)(3y + z)]^3 \\ &= (27x^2 + 27y^2 + 4z^2 + 54xy + 12xz + 12yz)^3 \\ &\leq [27(x + y + z)^2]^3 \\ &= 108^3, \end{aligned}$$

suy ra $E \leq 36$.

Vậy $E_{max} = 36$ khi $x = y = 1, z = 0$. □

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với DF và AI với DE .

- Chứng minh rằng $CM \perp AI$.
- Gọi K là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\triangle KMN$ cân.
- Tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại S . Chứng minh rằng $AS \parallel ID$.



a. Ta có:

$$\angle IMD = \angle BFD - \angle BAI = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle ACB}{2} = \angle ICD.$$

Suy ra tứ giác $IDMC$ nội tiếp $\rightarrow \angle CMA = \angle IDC = 90^\circ$. Do đó $CM \perp AI$.

b. Gọi L là trung điểm của AC . Khi đó KL là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên:

$$KL \parallel AB \quad (3)$$

Lại có $\triangle ACM$ vuông tại M , trung tuyến ML nên $\angle LMA = \angle LAM = \angle BAM$, suy ra:

$$ML \parallel AB \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra M, K, L thẳng hàng. Ta có $\triangle BFD$ cân tại B và $MK \parallel BF$ nên:

$$\angle KMD = \angle BFD = \angle BDF = \angle KDM,$$

Suy ra $\triangle KDM$ cân tại $K \rightarrow KM = KD$. Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\triangle KND$ cân tại $K \rightarrow KN = KD$, do đó $KM = KN \rightarrow \triangle KMN$ cân tại K .

c. Hạ đường cao AH của $\triangle ABC$. Chứng minh tương tự câu a, ta suy ra $BN \perp AM \rightarrow$ tứ giác $ANHB$ nội tiếp. Suy ra $\angle NHK = \angle BAM = \frac{\angle BAC}{2}$. Lại có tứ giác $AHMC$ nội tiếp nên $\angle MHC = \angle MAC = \frac{\angle BAC}{2}$. Do đó ta có:

$$\angle MHN = \angle MHK + \angle NHK = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAC. \quad (5)$$

Lại có:

$$\angle NKC = 2\angle KNM = 2\angle MAC = \angle BAC \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta suy ra được tứ giác $HNKM$ nội tiếp. Lại có tứ giác $SNKM$ nội tiếp. Nên 5 điểm S, H, N, K, M cùng thuộc một đường tròn đường kính $SK \rightarrow HS \perp BC$. Dẫn đến 3 điểm A, S, H thẳng hàng. Nên $AS \perp BC \rightarrow AS \parallel ID$. $\square$

Câu 5. Cho tập $S = \{1, 2, \dots, 2024\}$. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất để trong k phần tử bất kỳ của S luôn tồn tại hai phần tử a, b mà $ab + 1$ là một số chính phương.

Ta thấy nếu trong k phần tử mà chứa hai phần tử cách nhau 2 đơn vị, gọi là $a, a + 2$ thì $a(a + 2) + 1 = (a + 1)^2$ là số chính phương.

Chia S thành 1012 nhóm 2 phần tử

$$\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6, 8\}, \dots, \{2021, 2023\}, \{2022, 2024\}.$$

Với $k \geq 1013$ thì trong k phần tử này luôn có hai phần tử thuộc một nhóm (cách nhau hai đơn vị) và do đó có hai phần tử a, b mà $ab + 1$ là số chính phương.

Giờ ta chỉ ra một tập gồm 1012 phần tử không thoả mãn. Xét tập gồm 1012 phần tử $A = \{1, 2, 5, 6, \dots, 2021, 2022\}$ chứa các phần tử đồng dư với 1 hoặc 2 theo modulo 4. Với $a, b \in A$ thì có các khả năng:

- +) Nếu $a, b \equiv 1 \pmod{4}$ thì $ab + 1 \equiv 2 \pmod{4}$,
- +) Nếu $a \equiv 1 \pmod{4}, b \equiv 2 \pmod{4}$ thì $ab + 1 \equiv 3 \pmod{4}$,
- +) Nếu $a, b \equiv 2 \pmod{4}$ thì $ab + 1 \equiv 5 \pmod{8}$.

Trong cả ba trường hợp thì $ab + 1$ không là số chính phương.

Vậy $k_{\min} = 1013$. $\square$

ĐỀ 2

LỜI GIẢI

Câu 1.

a. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$$

b. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x-1| = 2 - |3-x| \\ x^3 + xy^2 + 4 = 4x^2 + x + 4y^2 \end{cases}$$

a, Phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[3]{8+x-x^2} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt[3]{7x+1} \\ b = \sqrt[3]{8+x-x^2} \\ c = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \end{cases} \quad \text{ta có } a+b+c = \sqrt[3]{a^3+b^3+c^3} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-a)(2-b)(2-c) = 0$$

Với $a = 2 \Rightarrow x = 1$ Với $b = 2 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ Với $c = 2 \Rightarrow x = -1 \vee x = 9$ Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 0; 1; 9\}$

□

b,

- Xét phương trình (1): $|x-1| + |3-x| = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A+B|$, ta có:

$$|x-1| + |3-x| \geq |(x-1) + (3-x)| = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x-1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

- Xét phương trình (2):

$$x^3 + xy^2 + 4 - 4x^2 - x - 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 4x^2 - x + 4) + (xy^2 - 4y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) + y^2(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

- Kết hợp với điều kiện $1 \leq x \leq 3$ ở trên:

- Với $x = 4$: Loại (không thuộc đoạn $[1; 3]$).
- Với $x^2 + y^2 = 1$: Do $x \in [1; 3]$ nên $x^2 \geq 1$.
Mà $x^2 = 1 - y^2 \leq 1$, suy ra bất buộc $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).
Thay $x = 1$ vào $x^2 + y^2 = 1$, ta được $y = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$. □

Câu 2.

- a. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.
- b. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $\sqrt{p^2 + 6pq + 2q^2} + \sqrt{q^2 + 6pq + 2p^2}$ là số nguyên.

a, Cộng thêm 27 vào cả hai vế của phương trình:

$$x^3 + y^3 + 27 - 9xy = 27$$

$$x^3 + y^3 + 3^3 - 3xy \cdot 3 = 27$$

Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Thay $a = x, b = y, c = 3$, ta được:

$$(x + y + 3)(x^2 + y^2 + 3^2 - xy - 3x - 3y) = 27$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 3) \cdot \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2] = 27$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 3) [(x - y)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2] = 54$$

Vì x, y là các số nguyên dương $\Rightarrow x \geq 1, y \geq 1$.

Do đó: $x + y + 3 \geq 1 + 1 + 3 = 5$.

Mặt khác, $x + y + 3$ phải là ước dương của 54. Các ước lớn hơn hoặc bằng 5 của 54 bao gồm: 6, 9, 18, 27, 54.

Ta xét các trường hợp:

- Trường hợp 1: $x + y + 3 = 6 \Rightarrow x + y = 3$
Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x; y) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.
– Thử lại với phương trình đầu: $1^3 + 2^3 - 9 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 18 \neq 0$ (Loại).
- Trường hợp 2: $x + y + 3 = 9 \Rightarrow x + y = 6$
Khi đó thừa số thứ hai bằng: $54/9 = 6$.

$$\Rightarrow (x - y)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 6$$

Thay $y = 6 - x$ vào phương trình trên:

$$(x - (6 - x))^2 + (x - 3)^2 + (6 - x - 3)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow (2x - 6)^2 + 2(x - 3)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4(x - 3)^2 + 2(x - 3)^2 = 6 \Leftrightarrow 6(x - 3)^2 = 6 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 1$$

- TH 1: $x - 3 = 1 \implies x = 4 \implies y = 6 - 4 = 2$.
- TH 2: $x - 3 = -1 \implies x = 2 \implies y = 6 - 2 = 4$.
- Thử lại: $2^3 + 4^3 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 8 + 64 - 72 = 0$ (Thỏa mãn).

- Trường hợp 3: $x + y + 3 = 18 \implies x + y = 15$
 Khi đó thừa số thứ hai bằng: $54/18 = 3$.

$$\implies (x - y)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Vì $x + y = 15$ là số lẻ nên x, y khác tính chẵn lẻ $\implies (x - y)^2$ lẻ $\implies (x - y)^2 \geq 1$.

Vì tổng ba bình phương bằng 3 nên chỉ có thể xảy ra khi cả ba đại lượng đều bằng 1:

$$(x - y)^2 = 1, (x - 3)^2 = 1, (y - 3)^2 = 1.$$

Từ $(x - 3)^2 = 1 \implies x \in \{2; 4\}$ và $y \in \{2; 4\}$. Khi đó $x + y \leq 8$, mâu thuẫn với $x + y = 15$ (Loại).

- Trường hợp 4: $x + y + 3 = 27 \implies x + y = 24 \implies$ thừa số thứ hai bằng 2.
 Ta có $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (x - y)^2 = 2$. Do $x + y = 24$, ít nhất x hoặc $y \geq 12$, dẫn tới $(x - 3)^2$ hoặc $(y - 3)^2 \geq 9^2 = 81 > 2$ (Loại).
- Trường hợp 5: $x + y + 3 = 54 \implies$ tương tự dẫn tới vô nghiệm.

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$(x; y) \in \{(2; 4), (4; 2)\}$$

□

b, Đặt $A = p^2 + 6pq + 2q^2$ và $B = q^2 + 6pq + 2p^2$.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Với x, y là các số hữu tỉ không âm thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ thì x, y là bình phương của các số hữu tỉ.

Chứng minh. Ta có các biến đổi sau

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q} \rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \in \mathbb{Q}$$

Do đây ta được

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x + \sqrt{xy}.$$

Vì $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$ ta suy ra $\sqrt{x}$ là số hữu tỉ. Khi đó x là bình phương của số hữu tỉ, chứng minh tương tự ta cũng thu được y là bình phương của số hữu tỉ (đpcm).

Từ bổ đề trên ta dễ dàng chứng minh được A và B là số chính phương.

Trường hợp 1: $p = q$

Thay vào ta được $A = B = 9p^2 = (3p)^2$ (thỏa mãn là số chính phương).

Do đó, mọi cặp số nguyên tố $p = q$ đều thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: $p \neq q$

Do vai trò của p, q bình đẳng, không mất tính tổng quát, giả sử $p < q$.

Vì A là số chính phương nên đặt $A = p^2 + 6pq + 2q^2 = m^2$ ($m \in \mathbb{Z}^+$).

Ta có biến đổi:

$$m^2 = (3q + p)^2 - 7q^2 \iff 7q^2 = (3q + p - m)(3q + p + m)$$

Đặt $u = 3q + p - m$ và $v = 3q + p + m$. Vì $m > 0$ nên $u < v$.

Ta có hệ thức:

$$\begin{cases} u \cdot v = 7q^2 \\ u + v = 2(3q + p) = 6q + 2p \end{cases}$$

Vì giả sử $p < q$ nên ta có:

$$u + v = 6q + 2p < 6q + 2q = 8q$$

Bây giờ ta chỉ cần xét các cặp ước (u, v) của $7q^2$ với $u < v$ sao cho tổng của chúng nhỏ hơn $8q$:

- Trường hợp 1: Nếu $q = 7$ thì $7q^2 = 7^3 = 343$. Các cặp (u, v) là $(1, 343)$ hoặc $(7, 49)$.
 - Với $(1, 343)$: $u + v = 344 > 8q = 56$ (Loại).
 - Với $(7, 49)$: $u + v = 56 = 6q + 2p \implies 42 + 2p = 56 \implies p = 7 = q$ (Loại vì $p < q$).
- Trường hợp 2: Nếu $q \neq 7$, các ước của $7q^2$ gồm $\{1, 7, q, 7q, q^2, 7q^2\}$. Ta xét các cặp (u, v) với $u < v$:
 - Cặp $(1, 7q^2) \implies u + v = 7q^2 + 1$. Dễ thấy $7q^2 + 1 > 8q$ với mọi số nguyên tố q (Loại).
 - Cặp $(q, 7q) \implies u + v = 8q$. Mà theo giả thiết $u + v < 8q$ (Loại).
 - Cặp $(7, q^2) \implies u + v = q^2 + 7$. Ta phải có:

$$q^2 + 7 < 8q \iff q^2 - 8q + 7 < 0 \iff (q - 1)(q - 7) < 0$$

Vì q là số nguyên tố nên $q \in \{2, 3, 5\}$.

Nếu $q = 2$: Không có số nguyên tố $p < 2$.

Nếu $q = 3 \implies p = 2$. Thay vào $B = q^2 + 6pq + 2p^2 = 3^2 + 6(2)(3) + 2(2^2) = 53$ (không phải số chính phương $\rightarrow$ Loại).

Nếu $q = 5 \implies p \in \{2, 3\}$.

- Với $p = 2 \implies B = 5^2 + 6(2)(5) + 2(2^2) = 93$ (Loại).
- Với $p = 3 \implies B = 5^2 + 6(3)(5) + 2(3^2) = 133$ (Loại).

Vậy các cặp số nguyên tố thỏa mãn đề bài là $(p; q)$ với $p = q$ và p là số nguyên tố bất kỳ. $\square$

Câu 3. Cho các số thực không âm a, b, c bất kì thỏa mãn không có hai số đồng thời bằng 0. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{3abc(a + b + c) + 1}{ab + bc + ca} + (a + b + c)^2.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c) \geq 4(ab + bc + ca)^2$$

Chứng minh:

Khai triển về trái (VT) bằng cách tách $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$:

$$VT = [(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)](ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c)$$

$$VT = (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca)^2 + 3abc(a + b + c)$$

Mặt khác, $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a + b + c)$$

Tiếp tục nhân bung $(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$:

$$= a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 + abc(a + b + c)$$

Thay trở lại vào bất đẳng thức, ta rút gọn được lượng $abc(a + b + c)$ ở cả hai vế, suy ra chỉ cần chứng minh:

$$a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Đến đây, áp dụng AM-GM cho các cặp số không âm:

- $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab(a^2 + b^2) \geq 2a^2b^2$
- $b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow bc(b^2 + c^2) \geq 2b^2c^2$
- $c^2 + a^2 \geq 2ca \Rightarrow ca(c^2 + a^2) \geq 2c^2a^2$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán

Theo giả thiết, không có 2 số nào đồng thời bằng 0 nên $ab + bc + ca > 0$. Chia cả 2 vế của bất đẳng thức phụ vừa chứng minh cho $ab + bc + ca$, ta được:

$$(a + b + c)^2 + \frac{3abc(a + b + c)}{ab + bc + ca} \geq 4(ab + bc + ca)$$

Quay lại biểu thức gốc P :

$$P = \frac{3abc(a + b + c) + 1}{ab + bc + ca} + (a + b + c)^2$$

Nhóm các hạng tử lại:

$$P = \left((a + b + c)^2 + \frac{3abc(a + b + c)}{ab + bc + ca} \right) + \frac{1}{ab + bc + ca}$$

Áp dụng đánh giá vừa tìm được ở trên:

$$P \geq 4(ab + bc + ca) + \frac{1}{ab + bc + ca}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết gọn gàng bằng AM-GM cho 2 số dương:

$$4(ab + bc + ca) + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq 2\sqrt{4(ab + bc + ca) \cdot \frac{1}{ab + bc + ca}} = 4$$

Vậy $P \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi thỏa mãn đồng thời:

1. Đẳng thức ở AM-GM phụ: $a = b, b = c, c = a$ hoặc có số bằng 0.
2. Đẳng thức ở AM-GM chính: $4(ab + bc + ca) = \frac{1}{ab+bc+ca} \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{2}$.

Ta có 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** $a = b = c$. Khi đó $3a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
- **Trường hợp 2:** Có 1 số bằng 0 (vì đề bài cho phép, miễn là không có 2 số đồng thời bằng 0). Giả sử $c = 0$, để $a^3b + ab^3 \geq 2a^2b^2$ thành đẳng thức thì $a = b$. Khi đó $a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4. □

Tuy nhiên đến đây hãy đặt câu hỏi tại sao chúng ta lại có bất đẳng thức phụ ở phần đầu lời giải?

Ban đầu chúng ta sẽ rất dễ dàng dự đoán được dấu bằng và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P . Điều đó có nghĩa là chúng ta cần phải đi chứng minh

$$(a + b + c)^2(ab + bc + ca) + 3abc(a + b + c) \geq 4(ab + bc + ca)^2 \quad (1)$$

Quan sát biểu thức P , ta thấy sự xuất hiện của các cụm lặp lại. Hãy đặt:

$$S = a + b + c \quad \text{và} \quad Q = ab + bc + ca$$

Biểu thức P trở thành:

$$P = \left(\frac{3abc \cdot S}{Q} + S^2 \right) + \frac{1}{Q}$$

Để tìm GTNN bằng kỹ thuật điểm rơi (AM-GM), mục tiêu của ta là chặn dưới cụm ngoặc đơn theo biến Q . Tức là ta cần tìm một hằng số k sao cho:

$$\frac{3abc \cdot S}{Q} + S^2 \geq k \cdot Q$$

Hằng số k tốt nhất thường là hằng số làm cho dấu bằng xảy ra tại các điểm thường gặp. Ta thử tại hai kịch bản phổ biến nhất:

- **Trường hợp 1: Tại tâm** ($a = b = c = 1$)
 - Khi đó: $S = 3, Q = 3, abc = 1$.
 - Thay vào biểu thức: $k = \frac{\frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{3} + 3^2}{3} = \frac{3 + 9}{3} = 4$.
- **Trường hợp 2: Tại biên** ($a = b = 1, c = 0$)
 - Khi đó: $S = 2, Q = 1, abc = 0$.
 - Thay vào biểu thức: $k = \frac{0 + 2^2}{1} = 4$.

Cả hai điểm rơi quan trọng đều cho về một con số duy nhất: $k = 4$.

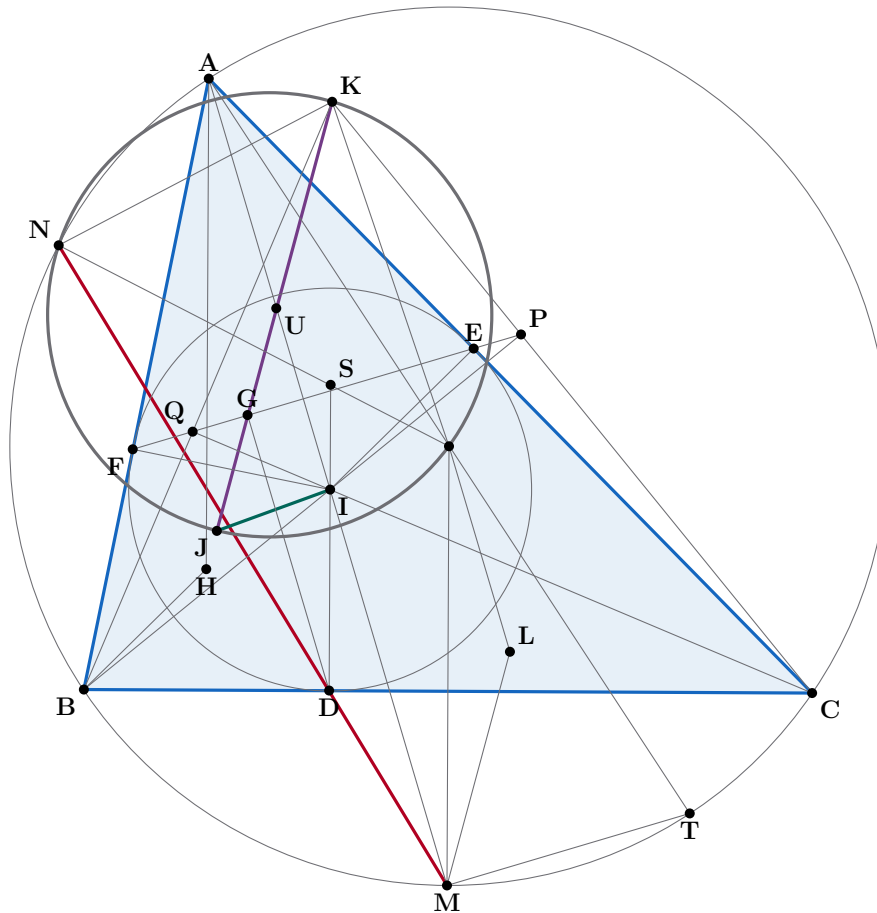
Từ dự đoán $\frac{3abc \cdot S}{Q} + S^2 \geq 4Q$, ta nhân cả hai vế với Q (vì $Q \geq 0$):

$$3abc \cdot S + S^2 \cdot Q \geq 4Q^2$$

Thay ngược lại S và Q , ta có chính xác BĐT phụ (1) cần dùng.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) , H là trực tâm của tam giác. Các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F ; gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BI, CI với EF ; CP, BQ cắt nhau ở K ; AI cắt (O) tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại (O) tại N .

- Chứng minh: N, D, M thẳng hàng và AO, NI cắt nhau trên (O) .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác NOM cắt NI tại L khác N . Chứng minh: OL vuông góc với EF .
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác NKO cắt HK tại J . Chứng minh: O, I, J thẳng hàng.



Lời giải bởi Facebook: Hưng Nhùn

Link bài đăng gốc: <https://www.facebook.com/share/p/1Lfdtq4C7E/>

a) Gọi $MD \cap (O) = N'$

Theo bổ đề bắn ta có: $MD \cdot MN' = MI^2 = MB^2 \Rightarrow \triangle DMI \sim \triangle IMN' (c-g-c) \Rightarrow \widehat{MN'I} = \widehat{DIM}$
 Có: $\widehat{IN'A} = \widehat{MN'A} - \widehat{IN'M} = 180^\circ - \widehat{MCA} - \widehat{DIM} = 180^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{BCA} - \widehat{DIM} = \widehat{IDC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow N' \in (AEF)$ và $N' \in MD \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow \overline{N, D, N'}$

Có: $\widehat{INA} = 90^\circ \Rightarrow AO$ cắt NI tại 1 điểm thuộc đường tròn (O)

b) Từ câu a suy ra: $\widehat{AMT} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMT} = 90^\circ$ ($AO \cap NI = T$) (1)

$MNOL$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MLN} = \widehat{MON} = 2\widehat{NAM}$ (góc nội tiếp - góc ở tâm chắn cung NM của (O))

Có: $\widehat{MIL} = \widehat{NIA} = 90^\circ - \widehat{NAI} = 90^\circ - \widehat{NAM} = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\widehat{NAM}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{MLI})$

$\Rightarrow \triangle LMI$ cân $\Rightarrow LM = LI$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow L$ là td $IT \Rightarrow OL$ là đường trung bình của $\Delta TIA \Rightarrow OL // AI$
 $\Rightarrow OL \perp EF$ (vì $AI \perp EF$)

c) Đầu tiên ta chứng minh bài toán phụ sau:

Cho ΔABC nhọn có trực tâm H , ngoại tiếp (I) . (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . Đường thẳng qua D vuông góc với EF cắt EF tại G . $BI \cap EF = P, CI \cap EF = Q, AI \cap EF = L$. Kẻ $KI \cap EF = R$. N đối xứng với I qua EF . CMR: H, G, N, K thẳng hàng.

*** Chứng minh K, N, G thẳng hàng:** $\frac{NI}{DG} = \frac{KI}{KD} = \frac{2IL}{DG}$

$$\Leftrightarrow \frac{KI}{2KD} = \frac{IL}{DG} = \frac{IR}{RD}$$

Gọi T là trung điểm $KI \Rightarrow \frac{KT}{KD} = \frac{RI}{RD}$

Đặt $RK = a, RI = b, ID = c$

Ta có: $\frac{b}{c} = \frac{a}{a+b+c} \Rightarrow ab + b^2 + bc = ac$ (vì $\frac{RI}{ID} = \frac{KR}{KD}$)

Ta cần cm: $\frac{b}{b+c} = \frac{a+b}{2(a+b+c)}$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2b^2 + 2bc = ab + ac + b^2 + bc \Leftrightarrow ab + b^2 + bc = ac \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow K, N, G$

*** Chứng minh K, N, H thẳng hàng:** $\frac{NI}{NA} = \frac{KI}{AH}$

Ta gọi O là tâm (ABC) , M' là tâm (KBC) . Ta gọi $AI \cap (O) = M$

Vì M' là tâm $(KBC) \Rightarrow KM' \perp BC$. Kẻ thông qua M' đường thẳng vuông góc v và $MM' \cap BC = S$.

Gọi M đối xứng với M' qua $BC \Rightarrow KI = MM'$ và $MM' // KI \Rightarrow M'KIM$ là hbh

Ta có $M'BMC$ là hình thoi $\Rightarrow M'B = MB = MC = CM' \Rightarrow M'K = MI$

Có: $M'KIM$ là hbh $\Rightarrow IM // KM' \Rightarrow IM \perp BC$ (vì $KM' \perp BC$ do M' là tâm (KBC))

$\Rightarrow M, A, I$ và $M \in (O)$. Có: $\frac{KI}{AH} = \frac{2M'S}{2OS} = \frac{SM'}{SO} \Rightarrow \frac{NI}{NA} = \frac{SM'}{SO} = \frac{SM}{SO}$

$\Rightarrow \frac{NA}{NI} = \frac{SO}{SM} \Rightarrow \frac{AE}{NI} = \frac{OM}{SM} \Rightarrow \frac{AI}{IL} = \frac{OM}{SM}$ (cái này để chứng minh - đồng dạng)

$\Rightarrow H, G, N, K$ (đpcm)

(Ta dễ chứng minh GQ, BP, KO là các đường cao của ΔKBC theo bổ đề IRAN)

Quay trở về bài toán: Ta gọi $IN \cap EF = G, U$ đối xứng với I qua EF .

Theo bổ đề bắn và kết quả quen thuộc trong mô hình nội tiếp, ta có:

$$\begin{cases} MD \cdot MN = MI^2 \\ IG \cdot IN = IE^2 = ID^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta IGD \sim \Delta IDN \\ \Delta IDN \sim \Delta NIM \end{cases} \Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{INM} = \widehat{IND} = \widehat{IDG}$$

$\Rightarrow DG // MI$ mà MI hay $AI \perp EF \Rightarrow DG \perp EF$

Theo bài toán phụ ta đã chứng minh trên, ta có: $\widehat{H, J, G, U, K}$

Ta gọi $NO \cap KI = S$. Có: $\widehat{SNG} = \widehat{ONI} = \widehat{OTN} = \widehat{ATN} = \widehat{AMN}$

và $\widehat{GKS} = \widehat{UKI} = \widehat{GUI} - \widehat{UIK} = \widehat{GIU} - \widehat{UIK} = \widehat{IGD} - \widehat{DIM} = \widehat{IDN} - \widehat{IDG} = \widehat{NDG} = \widehat{NMI} = \widehat{AMN}$

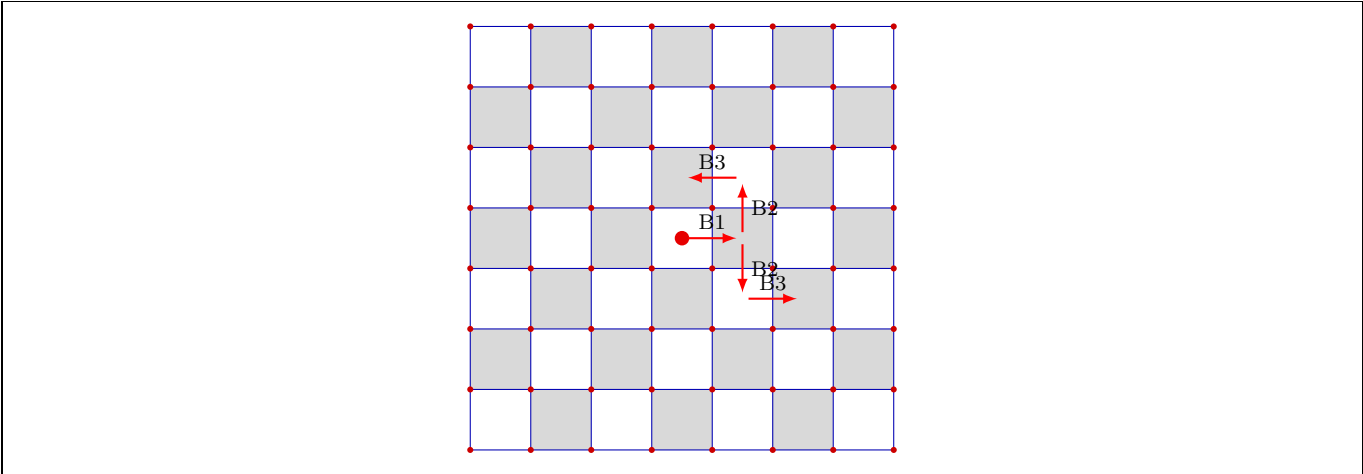
$\Rightarrow \widehat{GKS} = \widehat{SNG} \Rightarrow NGKS$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GKN} = \widehat{GSN}$

Ta có: $DG // MI$ (cmt) và $OM // DS$ do cùng $\perp BC \Rightarrow \frac{NO}{NM} = \frac{NG}{NI} = \frac{NS}{NO}$

$\Rightarrow GS // IO \Rightarrow \widehat{ION} = \widehat{GSN} = \widehat{GKN} = \widehat{JKN} = \widehat{JON}$

$\Rightarrow O, I, J$ (đpcm)

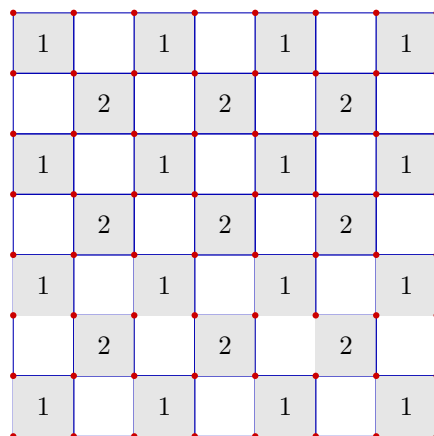
Câu 5. Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ, theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



Trên bảng có 25 ô đen và 24 ô trắng. Giả sử t là thời gian để robot đi từ tâm ô vuông này sang tâm của ô vuông chung cạnh với nó. Ta nói sau mỗi khoảng thời gian t , các con robot đi được 1 bước.

Nhận xét: Sau 1 bước đi, các con ở ô đen sẽ chuyển sang ô trắng, các con ở ô trắng sẽ chuyển sang ô đen. Vì thế ta luôn có thể giả sử ban đầu số con robot ở ô đen nhiều hơn số robot ở ô trắng. Suy ra số robot ở ô đen lớn hơn hoặc bằng 19 con.

Bây giờ ta đánh số cho các ô đen như hình vẽ.



Nhận xét: Sau hai bước đi, robot ở ô 1 sẽ chuyển sang ô 2 và ở ô 2 sẽ chuyển sang ô 1.

Vì thế, trong số 19 con robot ở ô đen, tồn tại ít nhất 10 con nằm trong các ô đánh số 1 hoặc ít nhất 10 con nằm trong các ô đánh số 2 (nếu cả hai loại đều ít hơn 10 con thì chỉ có tối đa 18 con. Mâu thuẫn)

+) Nếu có 10 con nằm trong ô số 1 thì sau 2 bước đi, chúng nằm trong ô số 2.

Do có 9 ô số 2, mà có 10 con robot, nên tồn tại hai con cùng 1 ô.

+) Nếu có 10 con nằm trong ô số 2, thì tương tự trên, cũng có 2 con cùng 1 ô. Ta có điều phải chứng minh.

ĐỀ 3

LỜI GIẢI

Câu 1. Giải phương trình:

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 1)\sqrt{x + 3} + (x + 7)\sqrt{x + 10}$$

Điều kiện: $x \geq -3$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{(x + 1)(\sqrt{x + 3} - 3)}{\sqrt{x + 3} + 3} + \frac{(x + 7)(\sqrt{x + 10} - 4)}{\sqrt{x + 10} + 4} = x^2 - x - 30 \\ & \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x - 6)}{\sqrt{x + 3} + 3} + \frac{(x + 7)(x - 6)}{\sqrt{x + 10} + 4} = (x - 6)(x + 5) \\ & \Leftrightarrow (x - 6) \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x + 3} + 3} + \frac{x + 7}{\sqrt{x + 10} + 4} - x - 5 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{x + 1}{\sqrt{x + 3} + 3} + \frac{x + 7}{\sqrt{x + 10} + 4} - x - 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý rằng, vì $x \geq -3$ nên:

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x + 3} + 3} + \frac{x + 7}{\sqrt{x + 10} + 4} < \frac{x + 1}{3} + \frac{x + 7}{6} = \frac{x + 3}{2} < x + 5$$

Do đó, $x = 6$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x + 3y + 3)\sqrt{xy + 3y} = y(3x + 2y + 9) \\ 4(x - 8)^3 - (x + 15)\sqrt{y - 2} = 20(11 - 4y) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -3 \\ y \geq 2 \end{cases}$. Chia hai vế của phương trình (1) cho y^2 , ta được:

$$\left(\frac{x + 3}{y} + 3 \right) \sqrt{\frac{x + 3}{y}} = 3 \cdot \frac{x + 3}{y} + 2 \quad (3).$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x + 3}{y}}$ ($t \geq 0$), phương trình (3) trở thành $t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0$ (4).

Phương trình (4) tương đương với $(t - 2)(t^2 - t + 1) = 0$ (5).

Phương trình (5) có 1 nghiệm duy nhất $t = 2$.

Khi đó $x + 3 = 4y$ hay $x = 4y - 3$ (6).

Do đó, $x + 15 = 4y + 12 = 4(y + 3)$; $11 - 4y = 8 - x$.

Thay các biểu thức trên vào phương trình (2), ta được:

$$4(x - 8)^3 - 4(y + 3)\sqrt{y - 2} = -20(x - 8) \quad (7).$$

Phương trình tương đương với:

$$(x-8)^3 + 5(x-8) = (y-2+5)\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow (x-8)^3 + 5(x-8) = (\sqrt{y-2})^3 + 5\sqrt{y-2} \quad (8).$$

Nếu $x-8 > \sqrt{y-2}$ thì $(x-8)^3 + 5(x-8) > (\sqrt{y-2})^3 + 5\sqrt{y-2}$.

Nếu $x-8 < \sqrt{y-2}$ thì $(x-8)^3 + 5(x-8) < (\sqrt{y-2})^3 + 5\sqrt{y-2}$.

Do đó, từ (8) suy ra $x-8 = \sqrt{y-2} \quad (9)$.

Thay (6) vào (9), ta được:
$$\begin{cases} y \geq \frac{11}{4} \\ 16y^2 - 89y + 123 = 0. \end{cases}$$

Khi đó $y = 3$ (nhận) hoặc $y = \frac{41}{16}$ (loại). Với $y = 3$, suy ra $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3. \end{cases}$$

Câu 3.

a. Tìm tất cả các số nguyên tố (p, q) và số nguyên dương n thỏa mãn: $2^n \cdot p^2 = q^5 - 1$. Tìm tất cả các bộ (p, q, n) thỏa mãn: $2^n \cdot p^2 = q^5 - 1$.

b. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{(a^2 + ab + b^2)^2(b+c)} + \frac{b^5}{(b^2 + bc + c^2)^2(c+a)} + \frac{c^5}{(c^2 + ca + a^2)^2(a+b)} \geq \frac{1}{6}$$

a. Từ $2^n \cdot p^2 = q^5 - 1 \quad (1)$, ta có: $2^n \cdot p^2 = (q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \quad (2)$.

Nếu $q = 2$ thì (1) trở thành $2^n \cdot p^2 = 31$, điều này vô lí.

Do đó q là số nguyên tố lẻ. Suy ra $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ là số lẻ, lớn hơn 1.

Từ (2) suy ra $q-1 \in \{2^n; 2^n \cdot p\}$.

– **Trường hợp 1:**
$$\begin{cases} q-1 = 2^n \cdot p \\ q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p \end{cases} \quad (3).$$

Từ (3) suy ra $p > q^2$. Suy ra $q-1 = 2^n \cdot p > q^2$, hay $q-1 > q^2$, điều này vô lí vì q là số nguyên tố.

– **Trường hợp 2:**
$$\begin{cases} q-1 = 2^n \quad (4) \\ q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2 \end{cases} \quad (5).$$

Từ (4) và kết quả câu a) suy ra $n = 2^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N})$.

Từ (5) suy ra $4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 4p^2$ là số chính phương.

Mặt khác $(2q^2 + q)^2 < 4(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) < (2q^2 + q + 2)^2$.

Suy ra $4p^2 = (2q^2 + q + 1)^2$. Suy ra $2p = 2q^2 + q + 1 \quad (6)$.

Từ (6) suy ra $2p = 2q^2 + q + 1 \geq 2 \cdot 3^2 + 3 + 1 = 22$. Suy ra $p \geq 11$, p là số nguyên tố lẻ.

Từ (4) và (6) suy ra $2(p - q^2 - 1) = q - 1 = 2^n$. Mà $p - q^2 - 1$ là số lẻ.

Nên
$$\begin{cases} 2^\alpha = 1 \\ p - q^2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ p = q^2 + 2 \end{cases} \quad (7).$$

Từ (6) và (7), suy ra $2(q^2 + 2) = 2q^2 + q + 1$, hay $q = 3$.

Từ (7) suy ra $p = 11$. Vậy $p = 11, q = 3, n = 1$.

Bài toán tương tự: Tìm tất cả các số nguyên tố p, q và các số nguyên dương n, m thỏa mãn $2^n \cdot p^2 = q^m - 1$.

Nhận thấy các phân thức ở vế trái đều có tổng bậc của tử số và mẫu số bằng nhau (cùng bậc 5). Ta tiến hành chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho đại lượng $(a + b + c)^5 > 0$. Bản chất của việc làm này là chuẩn hóa.

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}; y = \frac{b}{a+b+c}; z = \frac{c}{a+b+c}$.

Khi đó $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$P = \frac{x^5}{(x^2 + xy + y^2)^2(y + z)} + \frac{y^5}{(y^2 + yz + z^2)^2(z + x)} + \frac{z^5}{(z^2 + zx + x^2)^2(x + y)} \geq \frac{1}{6}$$

Để khử mẫu số, ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương:

$$\frac{x^5}{(x^2 + xy + y^2)^2(y + z)} + \frac{x(x^2 + xy + y^2)}{2} + \frac{x(x^2 + xy + y^2)}{2} + \frac{x(y + z)}{4} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^8}{16}} = 2x^2$$

Thu gọn ta được:

$$\frac{x^5}{(x^2 + xy + y^2)^2(y + z)} + x(x^2 + xy + y^2) + \frac{x(y + z)}{4} \geq 2x^2 \quad (2)$$

Tương tự cho hai phân thức còn lại:

$$\frac{y^5}{(y^2 + yz + z^2)^2(z + x)} + y(y^2 + yz + z^2) + \frac{y(z + x)}{4} \geq 2y^2 \quad (3)$$

$$\frac{z^5}{(z^2 + zx + x^2)^2(x + y)} + z(z^2 + zx + x^2) + \frac{z(x + y)}{4} \geq 2z^2 \quad (4)$$

Cộng vế theo vế (1), (2), và (3), ta thu được:

$$P + \sum_{\text{cyc}} x(x^2 + xy + y^2) + \frac{1}{4} \sum_{\text{cyc}} x(y + z) \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ta có các biến đổi sau:

- $\sum_{\text{cyc}} x(x^2 + xy + y^2) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2$ (do $x + y + z = 1$).
- $\sum_{\text{cyc}} x(y + z) = 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Thay vào biểu thức tổng:

$$P + (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{4} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow P + \frac{1}{4} \geq \frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$$

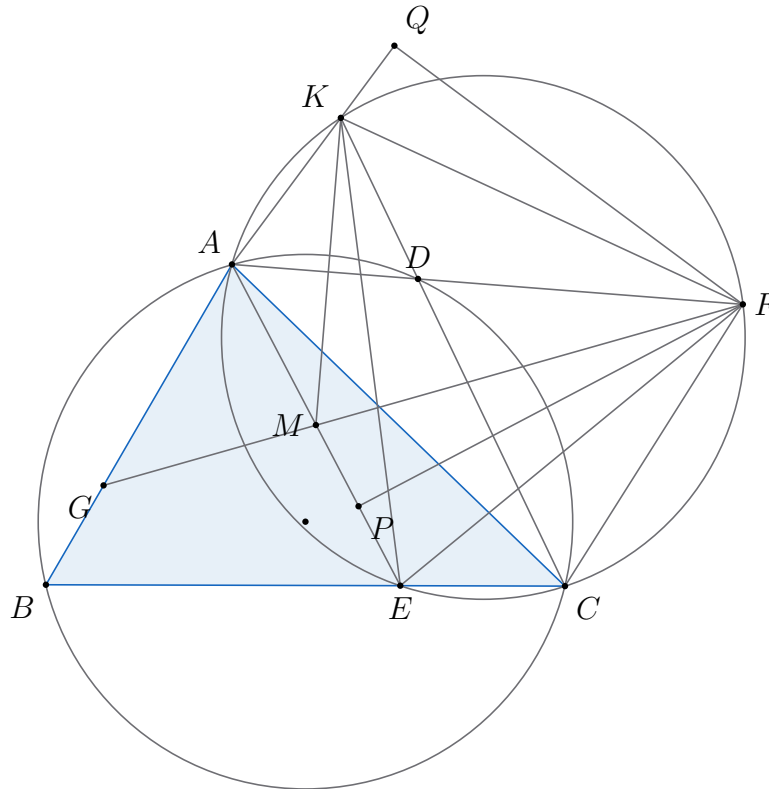
Áp dụng bất đẳng thức phụ $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{3}$, ta có:

$$P \geq \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$, tức là $a = b = c$. Bài toán được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , lấy điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $AB = 2AD$, phân giác trong của $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC tại điểm E , đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt AD tại F khác A .

1. Chứng minh: CF là phân giác ngoài của $\widehat{BCD}$.
2. Gọi M là trung điểm của AE , đường thẳng CD cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC tại điểm K . Chứng minh: Các tam giác EFK, AKM là tam giác cân.
3. Đường thẳng FM cắt AB tại G . Chứng minh: $MF = 2MG$.



1. Ta có:

$$\widehat{FCD} + \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \widehat{FCE} - \widehat{BCD} + \frac{1}{2}\widehat{BCD}$$

$$\text{Mà } \widehat{FCE} = 180^\circ - \widehat{EAF} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BCD}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BCD}.$$

Nên $\widehat{FCD} + \frac{1}{2}\widehat{BCD} = 90^\circ$, điều này chứng tỏ CF là phân giác ngoài của $\widehat{BCD}$.

2. Ta có:

$$\widehat{KAF} = \widehat{KCF} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BCD}) \quad \text{và} \quad \widehat{EAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BCD})$$

Nên $\widehat{KAF} = \widehat{EAF}$, điều này chứng tỏ AF là tia phân giác của $\widehat{KAE}$ nên F là điểm chính giữa cung lớn KE của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC hay $FK = FE$, suy ra tam giác KEF cân tại F .

Ta có: $\widehat{ADK} = \widehat{ABE}$, $\widehat{AKD} = \widehat{AKC} = \widehat{AEB}$ nên $\triangle ADK \sim \triangle ABE$ (g.g), suy ra:

$$\frac{AK}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad AK = \frac{1}{2}AE = AM$$

Nên tam giác AKM cân.

3. Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ F lên AE, AK thì $\triangle APF = \triangle AQF$ (ch-gn) nên $AP = AQ$.

Ta có: $\widehat{QKF} = \widehat{AEF}$ và $FK = FE$ nên $\triangle FPE = \triangle FQK$ (ch-gn), suy ra:

$$QK = PE = AE - AP = AE - AQ = AE - (AK + KQ)$$

Nên:

$$KQ = \frac{1}{2}(AE - AK) = \frac{1}{2}(AE - AM) = \frac{1}{2}ME$$

Điều này chứng tỏ P là trung điểm của ME nên tam giác MFE cân tại F , suy ra $FM = FK$ dẫn đến AF là trung trực của KM .

Do đó $\widehat{GFA} = \widehat{MFA} = \widehat{KFA} = \widehat{KEA} = \widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ suy ra $\triangle AFG \sim \triangle ABD$ (g.g).

Kết hợp với AM là phân giác của $\widehat{GAF}$, ta có:

$$\frac{MF}{MG} = \frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \quad \text{vậy} \quad MF = 2MG \text{ (đpcm).}$$

□

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước 2×2020 (bảng gồm 2 hàng và 2020 cột). Điền 2020 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng, sao cho ở mỗi ô được điền đúng một số, và tính từ trái qua phải, ở hàng thứ nhất, các số được điền theo thứ tự tăng dần, ở hàng thứ hai, các số được điền theo thứ tự giảm dần. Hỏi trong bảng số thu được, có bao nhiêu cột có tính chất: hai số cùng cột nguyên tố cùng nhau?

Nhận thấy: Cột thứ k có dòng thứ nhất là k và dòng thứ hai là $2021 - k$.

Ta có $\text{UCLN}(k, 2021 - k) = 1$ khi và chỉ khi $\text{UCLN}(k, 2021) = 1$.

Ta có $2021 = 43 \cdot 47$.

Số các số từ 1 đến 2021 chia hết cho 43 là 47 số và số các số chia hết cho 47 là 43 số. Chỉ có số 2021 là chia hết cho đồng thời 43 và 47.

Vậy số các cột có tính chất hai số cùng cột nguyên tố cùng nhau là:

$$2021 - 43 - 47 + 1 = 1932.$$

□

ĐỀ 4

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x^2} = x^3\sqrt{1+x^4}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1+xy} + \sqrt{1+x+y} = 2 \\ x^2y^2 - xy = x^2 + y^2 + x + y \end{cases}$$

a, Điều kiện xác định: $-1 \leq x \leq 1$.

Trường hợp 1: Xét $-1 \leq x \leq 0$.

VP: Vì $x \leq 0 \implies x^3 \leq 0$, suy ra $VP = x^3\sqrt{1+x^4} \leq 0$.

VT: Ta có $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \geq 2 \implies \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{2}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM:

$$|x\sqrt{1-x^2}| = \sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + (1-x^2)}{2} = \frac{1}{2} \implies x\sqrt{1-x^2} \geq -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $VT \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2} > 0$. Do đó $VT > 0 \geq VP$ (phương trình vô nghiệm).

Trường hợp 2: Xét $0 < x < 1$.

Vì $0 < x < 1 \implies 1-x^2 > 0 \implies \sqrt{1-x^2} > 0$.

Do đó: $(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} > 2 \implies \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > \sqrt{2}$.

Đồng thời $x\sqrt{1-x^2} > 0$, suy ra: $VT > \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$.

Xét về phải: Vì $0 < x < 1 \implies x^3 < 1$ và $x^4 < 1 \implies 1+x^4 < 2 \implies \sqrt{1+x^4} < \sqrt{2}$.

Do đó: $VP = x^3\sqrt{1+x^4} < 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Suy ra $VT > \sqrt{2} > VP$ (phương trình vô nghiệm).

Trường hợp 3: Xét $x = 1$.

$VT = \sqrt{2} + 0 + 0 = \sqrt{2}$.

$VP = 1^3 \cdot \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Nhận thấy $x = 1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$. □

b, Điều kiện xác định: $1+xy \geq 0$ và $1+x+y \geq 0$.

Ta cộng thêm $2xy$ vào hai vế:

$$x^2y^2 + xy = x^2 + 2xy + y^2 + x + y$$

$$\iff xy(xy+1) = (x+y)^2 + (x+y)$$

$$\iff xy(xy+1) - (x+y)(x+y+1) = 0$$

Đặt $u = xy$ và $v = x + y$, phương trình trở thành:

$$u(u+1) - v(v+1) = 0 \iff u^2 - v^2 + u - v = 0 \iff (u-v)(u+v+1) = 0$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $u = v \implies xy = x + y$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{1+xy} + \sqrt{1+xy} = 2 \iff 2\sqrt{1+xy} = 2 \iff 1+xy = 1 \iff xy = 0$$

Vì $xy = 0$ và $x + y = xy = 0$, ta dễ dàng suy ra $x = 0$ và $y = 0$. Thử lại vào hệ ban đầu thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2: $u + v + 1 = 0 \implies xy + x + y + 1 = 0 \iff (x + 1)(y + 1) = 0$. Suy ra $x = -1$ hoặc $y = -1$. Do vai trò của x, y đối xứng, giả sử $x = -1$. Thay vào phương trình (1):

$$\sqrt{1 - y} + \sqrt{y} = 2$$

Điều kiện xác định lúc này là $0 \leq y \leq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(\sqrt{1 - y} + \sqrt{y})^2 \leq 2(1 - y + y) = 2 \implies \sqrt{1 - y} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$$

Vì $\sqrt{2} < 2$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0, 0)$. □

Câu 2.

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn:

$$7y^3 + 3xy(x + 3y) = 3(x + y)^2 + 7$$

b) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\frac{1}{2} \leq a + 5b \leq 3$ và $2a^2 + 11ab + 5b^2 + 3 \geq 2a + 10b$. Chứng minh rằng:

$$4ab + 11b^2 \leq \frac{35}{9}$$

a, Khai triển và chuyển toàn bộ các hạng tử sang về trái:

$$7y^3 + 3x^2y + 9xy^2 - 3(x^2 + 2xy + y^2) - 7 = 0$$

$$\iff 3x^2y - 3x^2 + 9xy^2 - 6xy + 7y^3 - 3y^2 - 7 = 0$$

$$3(y - 1)x^2 + 3y(3y - 2)x + (7y^3 - 3y^2 - 7) = 0$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên ta xét các trường hợp của y :

Trường hợp 1: Nếu $y = 1$, phương trình trở thành:

$$3(0)x^2 + 3(1)(1)x + (7 - 3 - 7) = 0 \iff 3x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta được cặp nghiệm nguyên dương đầu tiên là $(x, y) = (1, 1)$.

Trường hợp 2: Nếu $y \geq 2$ (với $y \in \mathbb{Z}^+$): Hệ số của x^2 : $3(y - 1) \geq 3(2 - 1) = 3 > 0$. Vì $x \geq 1 \implies 3(y - 1)x^2 > 0$.

Ta có: $3y(3y - 2) > 0 \implies 3y(3y - 2)x > 0$. và $7y^3 - 3y^2 - 7 = y^2(7y - 3) - 7 \geq 2^2(7 \cdot 2 - 3) - 7 = 44 - 7 = 37 > 0$ nên tất cả các hạng tử ở vế trái đều dương với mọi $x \geq 1$ và $y \geq 2$, nên vế trái luôn lớn hơn 0, phương trình vô nghiệm.

Vậy cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn là $(x, y) = (1, 1)$. □

b, Xét giả thiết thứ hai của bài toán:

$$2a^2 + 11ab + 5b^2 + 3 \geq 2a + 10b$$

Ta có biến đổi:

$$2a^2 + 10ab + ab + 5b^2 - 2(a + 5b) + 3 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\iff 2a(a+5b) + b(a+5b) - 2(a+5b) + 3 \geq 0 \\ &\iff (2a+b)(a+5b) - 2(a+5b) + 3 \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt $x = a + 5b$ $y = 2a + b$

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

Thay vào ta được:

$$xy - 2x + 3 \geq 0 \iff x(y - 2) \geq -3$$

Vì $x \geq \frac{1}{2} > 0$, chia cả hai vế cho x ta rút ra được khoảng giá trị của y :

$$y - 2 \geq -\frac{3}{x} \iff y \geq 2 - \frac{3}{x} \quad (1)$$

Từ ẩn phụ ta có biến đổi, thu được:

$$P = \left(\frac{2x - y}{9} \right) (2x + y) = \frac{4x^2 - y^2}{9}$$

Ta cần chứng minh $P \leq \frac{35}{9} \iff 4x^2 - y^2 \leq 35$. Dựa vào điều kiện (1), ta xét hai trường hợp của x để đánh giá dấu của y :

Trường hợp 1: $2 - \frac{3}{x} \leq 0 \iff x \leq \frac{3}{2}$. Lúc này $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Do $y^2 \geq 0$, ta có:

$$4x^2 - y^2 \leq 4x^2 \leq 4 \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 9 < 35$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng trong trường hợp này.

Trường hợp 2: $2 - \frac{3}{x} > 0 \iff x > \frac{3}{2}$. Kết hợp với điều kiện ban đầu, ta có $x \in (\frac{3}{2}, 3]$. Vì $y \geq 2 - \frac{3}{x} > 0$, ta có thể bình phương 2 vế:

$$y^2 \geq \left(2 - \frac{3}{x} \right)^2 = 4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}$$

Suy ra:

$$4x^2 - y^2 \leq 4x^2 - \left(4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} \right) = 4x^2 - 4 + \frac{12}{x} - \frac{9}{x^2}$$

Ta cần chứng minh:

$$4x^2 - 4 + \frac{12}{x} - \frac{9}{x^2} \leq 35 \iff 4x^2 - 39 + \frac{12}{x} - \frac{9}{x^2} \leq 0$$

Quy đồng mẫu số (với $x > 0$):

$$\frac{4x^4 - 39x^2 + 12x - 9}{x^2} \leq 0 \iff 4x^4 - 39x^2 + 12x - 9 \leq 0$$

Phân tích nhân tử đa thức trên:

$$\iff (x - 3)(4x^3 + 12x^2 - 3x + 3) \leq 0$$

Ta đánh giá hai nhân tử: Vì $x \leq 3$ nên $x - 3 \leq 0$. Với $x > \frac{3}{2}$, ta biến đổi: $4x^3 + 12x^2 - 3x + 3 = 4x^3 + 3x(4x - 1) + 3$. Do $x > 1,5 \implies 4x - 1 > 5 > 0$, nên cụm $(4x^3 + 12x^2 - 3x + 3) > 0$.

Tích của một số không dương và một số dương chắc chắn sẽ không lớn hơn 0. Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Dấu bằng xảy ra khi: $x = 3$ và $y = 2 - \frac{3}{3} = 1$. Thay ngược lại hệ, ta được $a + 5b = 3$ và $2a + b = 1 \implies b = \frac{5}{9}$ và $a = \frac{2}{9}$. $\square$

Bài toán còn được giải bằng phép nhóm Abel. Mời bạn đọc tự tìm hiểu!

Câu 4.

- (a) Cho bốn số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4 sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi $k = 1, 2, 3, 4$ và tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số dạng $\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4$ có giá trị bằng 0.
- (b) Cho 1000 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với $k = 1, 2, \dots, 1000$ và tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{1000}$ là một số chẵn. Hỏi trong các số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_{1000}$ có số nào bằng 0 hay không? Giải thích vì sao?

(a) Ta có $4 \leq S \leq 10$ và S chẵn, suy ra $S = 4, 6, 8, 10$. Xét các trường hợp sau:
 Với $S = 4$, suy ra $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. Suy ra $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$.
 Với $S = 6$, ta có $6 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2$, suy ra có một cách thỏa đề bài.
 Với $S = 8$, ta có $8 = 1 + 1 + 2 + 4 = 1 + 1 + 3 + 3 = 1 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2$. Suy ra mỗi cách đều tồn tại một cách chọn dấu $+$, $-$ thỏa đề bài.
 Với $S = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Suy ra có một cách thỏa đề bài.

(b) Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau: Cho n số nguyên dương thỏa mãn $1 \leq a_k \leq k$ và $S_n = a_1 + \dots + a_n$ chẵn. Khi đó tồn tại số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n$ bằng 0.
 Khi $n = 2$, ta có $a_1 + a_2$ chẵn, suy ra $a_1 = a_2 = 1$. Suy ra $a_1 - a_2 = 0$.
 Giả sử bài toán đúng với mọi $k \leq n$. Ta chứng minh bài toán đúng với $n + 1$.
 Ta có $S_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$ chẵn. Ta có $0 \leq |a_n - a_{n+1}| \leq n$.
 Nếu $a_n - a_{n+1} = 0$, ta áp dụng giả thiết quy nạp với $n - 1$ số $a_1, \dots, a_{n-1}$ ta có điều cần chứng minh.
 Nếu $a_n - a_{n+1} \neq 0$. Áp dụng giả thiết quy nạp với n số $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, |a_n - a_{n+1}|$. Ta thấy $a_1 + \dots + a_{n-1} + |a_n - a_{n+1}|$ chẵn vì nó cùng tính chẵn lẻ với $a_1 + \dots + a_{n+1}$.
 Suy ra tồn tại số có dạng $\pm a_1 \pm a_2 \dots \pm |a_n - a_{n+1}| = \pm a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n \mp a_{n+1}$ bằng 0.
 Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

ĐỀ 5

LỜI GIẢI

Câu 1.

a. Giải phương trình:

$$8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$$

b. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2 - y)\sqrt{3 - 2y} \\ \sqrt{x + 2} = \sqrt[3]{14 - x\sqrt{3 - 2y}} + 1 \end{cases}$$

a. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$. Ta có:

$$\begin{aligned} 8x^2 + 16x - 7 &= (8x + 3)\sqrt{5x - 1} \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 16x - 7 - 24x - 9 &= (8x + 3)\sqrt{5x - 1} - 3(8x + 3) \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 8x - 16 &= (8x + 3) \cdot \frac{5x - 1 - 9}{\sqrt{5x - 1} + 3} \\ \Leftrightarrow 8(x + 1)(x - 2) &= 5(8x + 3) \cdot \frac{x - 2}{\sqrt{5x - 1} + 3} \end{aligned}$$

Suy ra $x = 2$ (thỏa mãn) hoặc $8(x + 1) = 5(8x + 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{5x - 1} + 3}$.

$$\begin{aligned} (8x + 8)(\sqrt{5x - 1} + 3) &= 5(8x + 3) \\ \Leftrightarrow (8x + 3 + 5)(\sqrt{5x - 1} + 3) &= 40x + 15 \\ \Leftrightarrow (8x + 3)\sqrt{5x - 1} + 5\sqrt{5x - 1} + 3(8x + 3) + 15 &= 40x + 15 \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 16x - 7 + 5\sqrt{5x - 1} + 24x + 9 + 15 &= 40x + 15 \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 2 + 5\sqrt{5x - 1} &= 0 \end{aligned}$$

Dạng thức trên là vô nghiệm thực.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$. □

b. Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ, chia phương trình (1) cho x^3 ta thu được:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} &= (4 - 2y)\sqrt{3 - 2y} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) &= (\sqrt{3 - 2y})^3 + \sqrt{3 - 2y} \end{aligned}$$

Đặt $a = 1 - \frac{1}{x}$, $b = \sqrt{3 - 2y}$ suy ra:

$$a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Thay vào phương trình thứ 2 ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+2}-3) - (\sqrt[3]{15-x}-2) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{x-7}{\sqrt[3]{(15-x)^2}+2\sqrt[3]{15-x}+4} = 0 \\ &\Leftrightarrow x=7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}. \end{aligned}$$

□

Câu 2.

- a. Tìm $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ đôi một nguyên tố cùng nhau thỏa mãn

$$(x+y)(y+z)(z+x) : xyz$$

- b. Cho các số nguyên dương a, b với $a > b$. Biết rằng $a^3 - b^3$ là một ước của $ab(a^2 + b^2)$. Chứng minh rằng $(a-b)^3 > 3ab$.

- a. Ta có:

$$\begin{cases} (x+y)(y+z)(z+x) : xyz \\ (x+y, x) = (z+x, x) = 1 \end{cases} \Rightarrow y+z : x$$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow x+y : z, z+x : y$

Đặt

$$\begin{cases} x+y = az \\ y+z = bx \\ z+x = cy \end{cases} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}^+)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử: $x > y > z \geq 1$ (do các số đôi một nguyên tố cùng nhau nên không thể bằng nhau trừ khi bằng 1, trường hợp bằng 1 sẽ xét riêng).

$$\Rightarrow y+z < 2x \Rightarrow bx < 2x \Rightarrow b < 2 \Rightarrow b = 1.$$

1. **Nếu $b = 1$:** Suy ra $y+z = x$. Thay vào hệ ban đầu ta được:

$$\begin{cases} (y+z) + y = az \Rightarrow 2y+z = az \Rightarrow 2y : z \\ z + (y+z) = cy \Rightarrow 2z+y = cy \Rightarrow 2z : y \end{cases}$$

Do $(y, z) = 1$ nên từ $2y : z \Rightarrow 2 : z \Rightarrow z \in \{1; 2\}$. Đồng thời từ $2z : y \Rightarrow 2z \geq y$.

- **Trường hợp $z = 1$:** Ta có $2 : y \Rightarrow y \in \{1; 2\}$. Vì $(y, z) = 1$ và $y > z \Rightarrow y = 2$. Suy ra $x = y+z = 2+1 = 3$. Thử lại bộ $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ thấy: $(3+2)(2+1)(1+3) = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60 : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 6$ (Thỏa mãn).
- **Trường hợp $z = 2$:** Ta có $2z : y \Rightarrow 4 : y \Rightarrow y \in \{1; 2; 4\}$. Vì $y > z = 2 \Rightarrow y = 4$. Tuy nhiên $(y, z) = (4, 2) = 2 \neq 1$ (Loại vì không nguyên tố cùng nhau).

2. **Xét các trường hợp biên có chứa số 1 giống nhau:** Nếu hai trong ba số bằng 1, giả sử $y = z = 1$. Vì $(x, 1) = 1$ nên bộ số có dạng $(x, 1, 1)$. Thay vào điều kiện chia hết:

$$(x+1)(1+1)(1+x) : x \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow 2(x+1)^2 : x \Rightarrow 2 : x \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 1.$$

- Với $x = 1 \Rightarrow (1, 1, 1)$ (Loại vì không đôi một nguyên tố cùng nhau).
- Với $x = 2 \Rightarrow (2, 1, 1)$ (Loại vì không đôi một nguyên tố cùng nhau).

Kết luận: Hoán vị các bộ số lại, ta có các bộ số (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$(3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2).$$

□

- b. Gọi d là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b . Khi đó tồn tại 2 số nguyên dương m, n nguyên tố cùng nhau và $a = dm, b = dn$.

Thay $a = dm, b = dn$ vào giả thiết của bài toán, ta được:

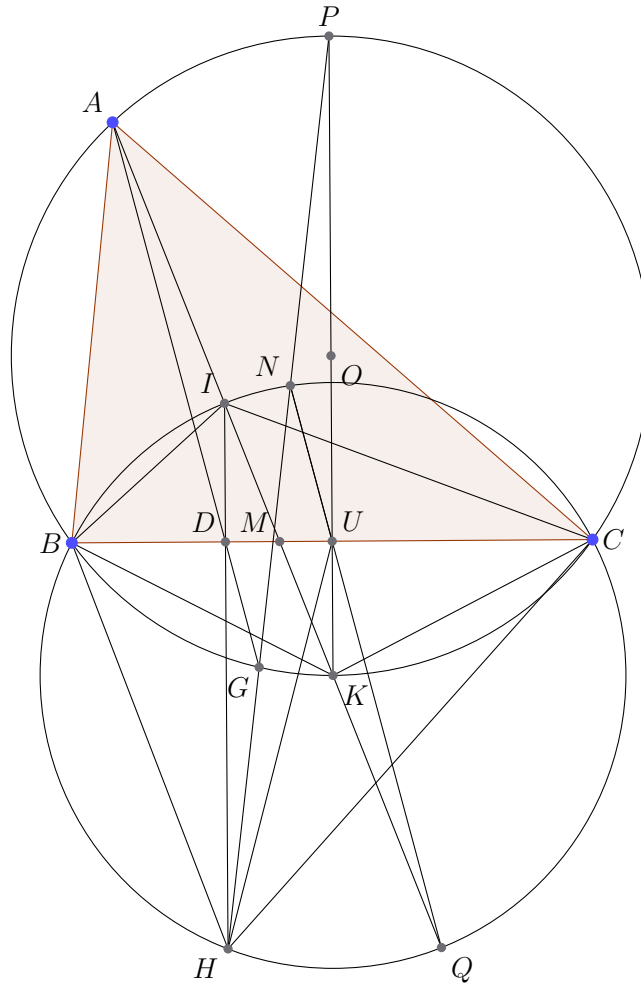
$$m^3 - n^3 \mid dm n(m^2 + n^2)$$

Suy ra $m^2 + mn + n^2 \mid dm n(m^2 + n^2)$. Mặt khác, ta có $(mn, m^2 + mn + n^2) = (m^2 + n^2, m^2 + mn + n^2) = 1$ nên suy ra $m^2 + mn + n^2 \mid d$. Mà d, m, n đều là các số nguyên dương nên $d \geq m^2 + mn + n^2 > 3mn$.

Suy ra $d(m - n)^3 \geq d > 3mn$ hay $(a - b)^3 > 3ab$. Hoàn tất chứng minh. □

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) , I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Gọi P là điểm chính giữa cung BC chứa A trên (O) , D là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC , G là giao điểm khác A của AD với đường tròn (O) , H là giao điểm của PG và ID .

- 1) Chứng minh $KB = KC = KI$ và tứ giác $IBHC$ nội tiếp.
- 2) Gọi N, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$ với các đường thẳng PH, AI . Gọi U là trung điểm của BC . Chứng minh UB là tia phân giác của $\widehat{NUH}$ và ba điểm N, Q, U thẳng hàng.



- a) Ta có I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ nên AI là phân giác của $\widehat{BAC}$ Suy ra $KB = KC$ (1).

Ta có $\widehat{KIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$ (góc ngoài $\triangle IAB$) Lại có $\widehat{IAB} = \widehat{IAC} = \widehat{CBK}$, $\widehat{IBA} = \widehat{IBC}$ Nên $\widehat{KIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{CBK} + \widehat{IBC} = \widehat{IBK}$ Do đó $\triangle KBI$ cân tại K . Suy ra $KB = KI$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $KB = KC = KI$.

Ta có $KB = KC$ và $PB = PC$ nên PK là đường trung trực của BC nên $PK \perp BC$ Mà $ID \perp BC$ nên $PK \parallel IH \Rightarrow \widehat{KPG} = \widehat{IHG}$. Lại có $\widehat{KPG} = \widehat{KAG}$ nên $\widehat{IHG} = \widehat{KAG}$ hay $\widehat{IHG} = \widehat{IAG}$. Khi đó $\triangle IAD \sim \triangle GHD$ (gg) $\Rightarrow DI.DH = DA.DG$. Tương tự $DB.DC = DA.DG$.

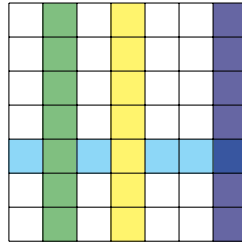
Do đó $DB.DC = DI.DH$. Từ đó $\triangle IDB \sim \triangle CDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{CHD}$. Suy ra tứ giác $IBHC$ nội tiếp.

- b) Do $KB = KC = KI$ nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$ (gọi là đường tròn (K)). Gọi U là trung điểm của BC , khi đó P, O, U, K thẳng hàng. Khi đó $\triangle PBK$ vuông tại B và $BU \perp PK \Rightarrow PU.PK = PB^2$ (3). Mặt khác $PB \perp BK$ nên PB là tiếp tuyến của (K) Chứng minh được $PN.PH = PB^2$ (4). Từ (3) và (4) $\Rightarrow PU.PK = PN.PH$. Từ đó tứ giác $NUKH$ nội tiếp đường tròn.

Tứ giác $NUKH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PUN} = \widehat{PHK} \Rightarrow \widehat{PUN} = \widehat{KNH} = \widehat{KUH}$. Mà $BU \perp PK$ nên $\widehat{BUN} = \widehat{BUH}$ hay UB là tia phân giác của $\widehat{NUH}$. Ta có IQ là đường kính của $(K) \Rightarrow IH \perp HQ$. Lại có $IH \perp BC$ nên $BC \parallel HQ$ (*). Gọi T là giao điểm của NU với (K) .

Do đó $\widehat{BUN} = \frac{1}{2}\widehat{NUH} = \frac{1}{2}\widehat{NKH} = \widehat{NTH}$. Suy ra $BC \parallel HT$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $Q \equiv T$. Mà NT qua U nên NQ qua U . Do đó NQ đi qua trung điểm của BC . $\square$

Câu 4. Trong các ô của bảng vuông kích thước $n \times n$ ô vuông, người ta viết các số sao cho tổng của các số có mặt trong các ô của một “chữ thập” (tức là hình gồm một hàng và một cột) bất kỳ không nhỏ hơn a . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các ô trong bảng.



Lấy một hàng có tổng các số trong hàng đó là nhỏ nhất. Sau đó xét tổng tất cả có “chữ thập” được lập nên từ các ô của hàng đó.

Có n “chữ thập” như vậy, theo điều kiện của bài toán. Ta suy ra, tổng các số ghi ở n “chữ thập” ấy không nhỏ hơn $n \cdot a$. Dễ thấy tổng nói trên bằng tổng của tất cả các số trong bảng cộng thêm $(n - 1)$ lần tổng các số trong hàng lấy ra.

Gọi tổng các số trong bảng là N , tổng các số trong hàng lấy ra là m , từ suy luận trên ta suy ra:

$$N + (n - 1) \cdot m \geq n \cdot a \quad (1)$$

Theo định nghĩa số m , ta có: $m \leq \frac{N}{n}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra: $N + \frac{N}{n} \cdot (n - 1) \geq n \cdot a \Leftrightarrow N \geq \frac{n^2}{2n - 1} \cdot a$.

Mặt khác, chọn tất cả các ô trong bảng đều bằng $\frac{a}{2n - 1}$. Khi đó tổng tất cả các số ghi trong mọi hình chữ thập là: $(2n - 1) \cdot \frac{a}{2n - 1} = a$.

Phép ghi như vậy là hợp lệ. Với cách ghi này, tổng các số ghi vào các ô trong bảng là $\frac{n^2 \cdot a}{2n - 1}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng cần tìm là $N_{\min} = \frac{n^2 \cdot a}{2n - 1}$. □

ĐỀ 6

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{(x+8)^5} + \sqrt[3]{x+8} = \sqrt[5]{(x+32)^3} + \sqrt[5]{x+32} + 24$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$$

a) Đặt $u = \sqrt[3]{x+8}$ và $v = \sqrt[5]{x+32}$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$u^5 + u = v^3 + v + 24 \quad (1)$$

Mặt khác, từ cách đặt ta có $x = u^3 - 8$ và $x = v^5 - 32$, suy ra:

$$v^5 - u^3 = 24 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} u^5 + u &= v^3 + v + (v^5 - u^3) \\ \iff u^5 + u^3 + u &= v^5 + v^3 + v \\ \iff (u^5 - v^5) + (u^3 - v^3) + (u - v) &= 0 \\ \iff (u - v) [(u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4) + (u^2 + uv + v^2) + 1] &= 0 \end{aligned}$$

Vì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương với mọi u, v nên ta bắt buộc phải có:

$$u - v = 0 \iff u = v$$

Suy ra $\sqrt[3]{x+8} = \sqrt[5]{x+32}$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x+8} = \sqrt[5]{x+32}$. Ta có:

$$\begin{aligned} t^3 - 8 &= t^5 - 32 \iff t^5 - t^3 - 24 = 0 \\ \iff t^5 - 2t^4 + 2t^4 - 4t^3 + 3t^3 - 6t^2 + 6t^2 - 12t + 12t - 24 &= 0 \\ \iff (t - 2)(t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 12) &= 0 \end{aligned}$$

Ta xét nhân tử bậc 4:

$$t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 12 = (t^2 + t)^2 + 2t^2 + 6t + 12 = (t^2 + t)^2 + 2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$

Do đó, phương trình có nghiệm duy nhất $t = 2$.

Thế lại để tìm x : $\sqrt[3]{x+8} = 2 \implies x+8 = 8 \implies x = 0$. □

b) Điều kiện : $x^2 + 2y + 1 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình đầu tiên tương đương: } 4y^2 - 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} + x^2 + 2y + 1 &= x^2 - 2xy + y^2 \iff \\ (2y - \sqrt{x^2 + 2y + 1})^2 &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x \\ \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y \end{cases} \\ \text{TH1 : } &\sqrt{x^2 + 2y + 1} = 3y - x \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 3y \geq x \\ x^2 + 2y + 1 = 9y^2 - 6xy + x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3y \geq x \\ 6xy = 9y^2 - 2y - 1 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1, y = 1 \text{ (TM)} \\ x = \frac{415}{51}, y = \frac{17}{3} \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x + y$$

$$\iff \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 + 2y + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2xy = -y^2 + 2y + 1 \\ xy = y^2 + 3y - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = \frac{41}{21}, y = -\frac{7}{3} \text{ (L)} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm : $(x; y) = (1; 1), (\frac{415}{51}; \frac{17}{3})$

□

Câu 2.

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^4 + 2y^3 + 1 = xy^3 + y$$

b) Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{6abc}{ab + bc + ca} \geq 5$$

a) Chuyển về và nhóm nhân tử, ta được:

$$x^4 + 1 = y^3(x - 2) + y \quad (*)$$

Dễ thấy với $x = 2$, $(*)$ trở thành:

$$2^4 + 1 = y^3(0) + y \implies y = 17$$

Ta có nghiệm đầu tiên: $(2; 17)$.

Với $x \geq 5 \implies x - 2 > 0$. Ta sẽ chứng minh $x - 1 < y < x + 1$.

• **Chứng minh $y \leq x$:**

Giả sử $y \geq x + 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} y^3(x-2) + y &\geq (x+1)^3(x-2) + x+1 \\ &= x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

Xét hiệu: $(x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1) - (x^4 + 1) = x(x-4)(x+1) - 2$.

Với $x \geq 5$, dễ thấy $x(x-4)(x+1) - 2 \geq 5 \cdot 1 \cdot 6 - 2 = 28 > 0$.

Do đó $y^3(x-2) + y > x^4 + 1$ (Vô lý với (*)). Suy ra $y \leq x$.

• **Chứng minh $y \geq x$:**

Giả sử $y \leq x - 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} y^3(x-2) + y &\leq (x-1)^3(x-2) + x-1 \\ &= x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Xét hiệu: $(x^4 + 1) - (x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 6x + 1) = x(5x^2 - 9x + 6) > 0, \forall x > 0$.

Do đó $y^3(x-2) + y < x^4 + 1$ (Vô lý). Suy ra $y \geq x$.

Từ hai điều trên, ta bắt buộc phải có $y = x$. Thay $y = x$ vào (*):

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^3(x-2) + x \iff 2x^3 - x + 1 = 0 \\ &\iff (x+1)(2x^2 - 2x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Vì $2x^2 - 2x + 1 > 0$ nên $x = -1$. (Loại vì đang xét $x \geq 5$).

Vì $x - 2 < 0$, chiều bất đẳng thức khi đánh giá sẽ ngược lại:

• Nếu $y \leq x - 1$: $y^3(x-2) + y \geq (x-1)^3(x-2) + x-1$.

Xét hiệu $VP - VT = -5x^3 + 9x^2 - 6x > 0$ (vì $x < 0$). Suy ra $VP > x^4 + 1$ (Loại).

• Nếu $y \geq x + 2$: $y^3(x-2) + y \leq (x+2)^3(x-2) + x+2 = x^4 + 4x^3 - 15x - 14$.

Xét $(x^4 + 1) - VP = -4x^3 + 15x + 15 \geq 32 - 30 + 15 = 17 > 0$ (vì $x \leq -2$).

Suy ra $VP < x^4 + 1$ (Loại).

Do đó, với $x \leq -2$, ta bị kẹp hẹp lại: $y \in \{x; x+1\}$.

• Nếu $y = x \implies (x+1)(2x^2 - 2x + 1) = 0 \implies x = -1$ (Loại vì $x \leq -2$).

• Nếu $y = x + 1 \implies (x+1)^3(x-2) + x+1 = x^4 + 1 \iff x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = 0$.

Với $x \leq -2 \implies x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = x(x^2 - 4) - 3x^2 - 2 < 0$. (Vô nghiệm).

Ta thử trực tiếp các trường hợp $x \in \{-1; 0; 1; 3; 4\}$ vào phương trình $y^3(x-2) + y = x^4 + 1$:

• $x = -1 \implies -3y^3 + y = 2 \iff (y+1)(3y^2 - 3y + 2) = 0 \implies y = -1$.

• $x = 0 \implies -2y^3 + y = 1 \iff (y+1)(2y^2 - 2y + 1) = 0 \implies y = -1$.

• $x = 1 \implies -y^3 + y = 2 \iff y^3 - y + 2 = 0$. (Không có nghiệm nguyên).

• $x = 3 \implies y^3 + y = 82 \iff y(y^2 + 1) = 82$. (Không có nghiệm nguyên).

• $x = 4 \implies 2y^3 + y = 257 \iff y(2y^2 + 1) = 257$. (Không có nghiệm nguyên).

Kết luận: Hệ có 3 cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(2; 17), (0; -1), (-1; -1)$. □

b) Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức dưới đúng với mọi số thực dương a, b, c

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Ta đưa về chứng minh $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$, hay

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a),$$

đúng do $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b, b^3 + bc^2 \geq 2b^2c, c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$.

Trở lại bài toán.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + \frac{18abc}{bc + ca + ab} &\geq 5(a + b + c) \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{18abc}{bc + ca + ab} &\geq 4(a + b + c) \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{18abc}{bc + ca + ab} &\geq 4(a + b + c) \\ \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - (a + b + c) &\geq 3(a + b + c) - \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} - \frac{18abc}{bc + ca + ab} \\ \Leftrightarrow \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a + b + c)}{abc} &\geq \frac{6(bc + ca + ab)}{a + b + c} - \frac{18abc}{bc + ca + ab} \\ \Leftrightarrow \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a + b + c)}{abc} &\geq \frac{6[b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a + b + c)]}{(a + b + c)(bc + ca + ab)} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta thấy $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - abc(a + b + c) \geq 0$ nên chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{abc} \geq \frac{6}{(a + b + c)(bc + ca + ab)}$$

đúng vì $(a + b + c)(bc + ca + ab) \geq 9abc > 6abc$.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bổ đề trên được tạo ra bằng cách nào?

Ta có:

$$P = \sum \frac{a^2}{b} = \sum \frac{(a^2)^2}{a^2b} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Bây giờ ta cần so sánh: $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$ với $\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$.

Triệt tiêu bớt $(a^2 + b^2 + c^2)$, ta cần chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Nhân tung về trái:

$$a^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^3 + b^2c + c^2a + c^2b + c^3 \geq 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a$$

Rút gọn các đại lượng giống nhau ở hai vế:

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2a^2b + 2b^2c + 2c^2a$$

Đến đây, ta dùng kỹ thuật ghép cặp AM-GM. Ta thấy vế phải có $2a^2b$, vế trái có a^3 và ab^2 .

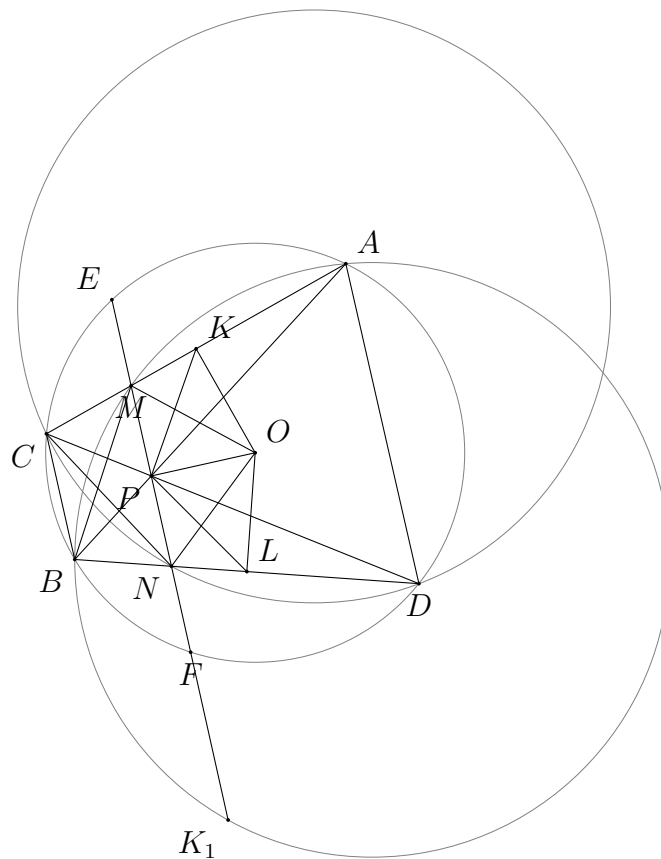
Ghép: $a^3 + ab^2 \geq 2\sqrt{a^3 \cdot ab^2} = 2a^2b$

Tương tự: $b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$ và $c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$. Cộng lại ta có đpcm. Vậy BDT phụ hoàn toàn đúng.

Câu 3. Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn (P không trùng với O). Qua P kẻ hai dây cung AB và CD của (O) . Một đường thẳng d đi qua P cắt các đoạn thẳng AC và BD lần lượt tại M và N .

- a) Giả sử $d \perp OP$. Chứng minh rằng P là trung điểm của đoạn thẳng MN .
- b) Trong trường hợp tổng quát (nghĩa là đường thẳng d không nhất thiết vuông góc với OP), giả sử d cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F (sao cho M nằm giữa E và P). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{PE} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{PF} + \frac{1}{PM}$$



a) Gọi K, L lần lượt là trung điểm của các dây cung AC và BD .
Suy ra $OK \perp AC$ tại K và $OL \perp BD$ tại L .

Xét tứ giác $OKMP$, ta có $\widehat{OKM} = 90^\circ$ và $\widehat{OPM} = 90^\circ$ (do $d \perp OP$).

$\Rightarrow O, K, M, P$ cùng thuộc một đường tròn đường kính OM .

$\Rightarrow \widehat{OMP} = \widehat{OKP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OP). (1)

Tương tự, xét tứ giác $OLNP$, ta có $\widehat{OLN} = 90^\circ$ và $\widehat{OPN} = 90^\circ$.

$\Rightarrow O, L, N, P$ cùng thuộc đường tròn đường kính ON .

$\Rightarrow \widehat{ONP} = \widehat{OLP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OP). (2)

Xét $\triangle PAC$ và $\triangle PDB$, ta có:

- $\widehat{APC} = \widehat{DPB}$ (đối đỉnh).
- $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

$\Rightarrow \triangle PAC \sim \triangle PDB$ (g-g).

Vì K, L là trung điểm của AC, BD nên PK, PL là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng.

$\Rightarrow \triangle PKC \sim \triangle PLB$ (c-g-c).

$\Rightarrow \widehat{PKC} = \widehat{PLB}$.

Lại có $\widehat{OKP} = 90^\circ - \widehat{PKC}$ và $\widehat{OLP} = 90^\circ - \widehat{PLB}$.

Do đó, $\widehat{OKP} = \widehat{OLP}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{OMP} = \widehat{ONP}$.

Tam giác OMN có OP vừa là đường cao ($OP \perp MN$), vừa là đường phân giác (do $\triangle OMN$ cân tại O vì $\widehat{OMP} = \widehat{ONP}$).

$\Rightarrow OP$ là đường trung tuyến của $\triangle OMN$.

Vậy P là trung điểm của MN .

b) Trước hết, ta chứng minh kết quả sau:

$$\frac{EM \cdot PF}{PM} = \frac{NF \cdot PE}{PN}$$

(Bổ đề Haruki)

Thật vậy, vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt đường thẳng EF tại điểm thứ hai là K_1 . Theo tính chất phương tích của điểm P đối với đường tròn (ADM) , ta có:

$$PM \cdot PK_1 = PA \cdot PB$$

Mà theo phương tích của điểm P đối với đường tròn (O) , ta có $PA \cdot PB = PE \cdot PF$. Từ đó suy ra:

$$PM \cdot PK_1 = PE \cdot PF \Rightarrow PK_1 = \frac{PE \cdot PF}{PM}$$

Ta có:

$$FK_1 = PK_1 - PF = \frac{PE \cdot PF}{PM} - PF = \frac{PF \cdot (PE - PM)}{PM}$$

Vì điểm M nằm giữa E và P nên $PE - PM = EM$. Do đó:

$$FK_1 = \frac{PF \cdot EM}{PM} \quad (1)$$

Lại có: $\widehat{PK_1B} = \widehat{BAM}$ và $\widehat{BAM} = \widehat{BDC}$ suy ra $\widehat{PK_1B} = \widehat{BDC}$, dẫn đến tứ giác PDK_1B nội tiếp. Áp dụng tính chất phương tích của điểm N đối với đường tròn nội tiếp (PDK_1B) , ta có:

$$NP \cdot NK_1 = NB \cdot ND$$

Mà theo phương tích của điểm N đối với đường tròn (O) , ta có $NB \cdot ND = NE \cdot NF$. Suy ra:

$$NP \cdot NK_1 = NE \cdot NF \Rightarrow PN \cdot (PK_1 - PN) = (PE + PN) \cdot (PF - PN)$$

Khai triển và rút gọn biểu thức trên:

$$\begin{aligned} PN \cdot PK_1 - PN^2 &= PE \cdot PF - PE \cdot PN + PN \cdot PF - PN^2 \\ &\Rightarrow PN \cdot PK_1 = PE \cdot PF - PE \cdot PN + PN \cdot PF \\ &\Rightarrow PK_1 = \frac{PE \cdot PF}{PN} - PE + PF \Rightarrow PK_1 - PF = \frac{PE \cdot (PF - PN)}{PN} \end{aligned}$$

Vì N nằm giữa P và F nên $PF - PN = NF$. Ta thu được:

$$FK_1 = \frac{PE \cdot NF}{PN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có đẳng thức:

$$\frac{EM \cdot PF}{PM} = \frac{NF \cdot PE}{PN}$$

Đặt $PE = a, PF = b, PM = m, PN = n$. Khi đó $EM = a - m$ và $NF = b - n$. Thay vào hệ thức trên:

$$\begin{aligned} \frac{(a - m)b}{m} &= \frac{(b - n)a}{n} \\ \Leftrightarrow abn - bmn &= abm - amn \Leftrightarrow abn + amn = abm + bmn \end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho tích $abmn > 0$, ta được:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a}$$

Hay:

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PF} = \frac{1}{PN} + \frac{1}{PE}$$

Sắp xếp lại các số hạng, ta thu được điều phải chứng minh:

$$\frac{1}{PE} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{PF} + \frac{1}{PM}$$

□

Câu 4. Trên một bàn cờ cỡ $n \times n$ đặt các quân xe thỏa mãn điều kiện sau: Với một ô vuông không có quân xe bất kỳ thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng trên bàn cờ có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân xe.

Đây là bài toán tổ hợp chúng ta sẽ sử dụng kĩ thuật đếm bằng 2 cách
Kí hiệu S là tổng số quân xe trên bàn cờ.

- Gọi r_i là số quân xe ở hàng i ($i = 1, \dots, n$).
- Gọi c_j là số quân xe ở cột j ($j = 1, \dots, n$).
- Ta có: $\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^n c_j = S$.

- Số ô trống trên bàn cờ là $n^2 - S$.

Ta xét tập hợp các cặp (O, X) trong đó O là một ô trống và X là một quân xe nằm cùng hàng hoặc cùng cột với O . Ta sẽ đếm số lượng cặp này theo hai cách:

Cách 1: Đếm từ phía các ô trống

Theo giả thiết, với mỗi ô trống O , tổng số quân xe ở cùng hàng và cùng cột với nó không nhỏ hơn n . Vì có $n^2 - S$ ô trống, nên tổng số cặp (O, X) , gọi là T , thỏa mãn:

$$T \geq (n^2 - S) \cdot n = n^3 - nS \quad (1)$$

Cách 2: Đếm từ phía các quân xe

Một quân xe nằm ở ô (i, j) sẽ được tính cặp với các ô trống trong hàng i và các ô trống trong cột j .

- Số ô trống ở hàng i là $n - r_i$.
- Số ô trống ở cột j là $n - c_j$.

Tổng số cặp (O, X) tính theo tất cả các quân xe là:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\text{các quân xe}} (n - r_i + n - c_j) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(n - r_i) + \sum_{j=1}^n c_j(n - c_j) \\ &= (nS - \sum_{i=1}^n r_i^2) + (nS - \sum_{j=1}^n c_j^2) \\ &= 2nS - \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 \right) \end{aligned}$$

Kết hợp và chứng minh:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $\sum r_i^2 \geq \frac{(\sum r_i)^2}{n} = \frac{S^2}{n}$. Thay vào biểu thức của T :

$$T \leq 2nS - \left(\frac{S^2}{n} + \frac{S^2}{n} \right) = 2nS - \frac{2S^2}{n} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} 2nS - \frac{2S^2}{n} &\geq n^3 - nS \\ \Leftrightarrow 3nS - \frac{2S^2}{n} - n^3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3n^2S - 2S^2 - n^4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2S^2 - 3n^2S + n^4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2S - n^2)(S - n^2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Vì $S \leq n^2$ (tổng số quân xe không vượt quá tổng số ô), nên $S - n^2 \leq 0$. Để tích không dương thì:

$$2S - n^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{n^2}{2}$$

□

ĐỀ 7

LỜI GIẢI

Câu 1.

a) Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + y\sqrt{y} - x\sqrt{x-1} - \sqrt{xy-y} = 0 \\ x^2 - 4xy + 2x + 4y = \sqrt{x-2y-1} + 3 \end{cases}$$

a) Nhận xét:

- $5x^2 + 10x + 30 = 5(x^2 + 2x + 6)$
- $x^4 + 8x^2 + 36 = (x^2 + 2x + 6)(x^2 - 2x + 6)$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 2x + 6} > 0$ và $b = \sqrt{x^2 - 2x + 6} > 0$. Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{\sqrt{5}a} + \frac{1}{3b} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{ab}$$

$$\Leftrightarrow 3b + \sqrt{5}a = ab + 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)(b-\sqrt{5}) = 0$$

- **TH1:** $a = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 6} = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$
- **TH2:** $b = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 6} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -3\}$. □b) Điều kiện xác định: $x \geq 1, y \geq 0, x - 2y - 1 \geq 0$.

Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow y(x + \sqrt{y}) - \sqrt{x-1}(x + \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{y})(y - \sqrt{x-1}) = 0$$

Vì $x \geq 1, y \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{y} > 0$, do đó:

$$y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = y^2 + 1$$

Thay vào điều kiện $x - 2y - 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$ (do $y \geq 0$).Thay $x = y^2 + 1$ vào phương trình (2):

$$\begin{aligned} (y^2 + 1)^2 - 4y(y^2 + 1) + 2(y^2 + 1) + 4y &= \sqrt{y^2 - 2y + 3} \\ \Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 4y^2 + 3 &= \sqrt{y^2 - 2y + 3} \\ \Leftrightarrow [y(y-2)]^2 &= \sqrt{y(y-2)} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{y(y-2)} \geq 0$, phương trình trở thành:

$$t^4 = t \Leftrightarrow t(t^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

- **TH1:** $t = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 2$ (vì $y \geq 2$). Suy ra $x = 5$.
- **TH2:** $t = 1 \Rightarrow y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 + \sqrt{2}$ (vì $y \geq 2$). Suy ra $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(5; 2)$ và $(4 + 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$. □

Câu 2.

a) Cho số nguyên tố p và số nguyên dương n . Xét các số nguyên a, b, c thoả mãn:

$$a^n + pb = b^n + pc = c^n + pa$$

Chứng minh rằng $a = b = c$.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

a) **Quan sát:** rất dễ thấy ba biến hoán vị vòng quanh, vì vậy nên ta nghĩ đến việc sắp xếp thứ tự biến như sau: Giả sử $a \geq b \geq c$. Từ giả thiết, ta tạo ra các đẳng thức:

1. $a^n - b^n = p(c - b)$
2. $b^n - c^n = p(a - c)$
3. $c^n - a^n = p(b - a)$

- Từ $a \geq b \geq c \Rightarrow a - c \geq 0$.
- Nhìn vào đẳng thức (2): $b^n - c^n = p(a - c)$.
 Vì $a \geq c \Rightarrow p(a - c) \geq 0 \Rightarrow b^n - c^n \geq 0 \Rightarrow b \geq c$ (điều này luôn đúng với giả sử).
- Nhìn vào đẳng thức (1): $a^n - b^n = p(c - b)$.
 Vì $a \geq b \Rightarrow a^n - b^n \geq 0 \Rightarrow p(c - b) \geq 0 \Rightarrow c \geq b$.

Từ $b \geq c$ và $c \geq b$, bắt buộc phải có $b = c$.

Thay $b = c$ vào đẳng thức (1):

$$a^n - b^n = p(b - b) = 0 \Rightarrow a^n = b^n \Rightarrow a = b$$

(vì nếu n chẵn và $a = -b$, thay vào giả thiết ban đầu cũng dễ dàng suy ra $a = b$).

Vậy ta luôn có $a = b = c$. □

b) **Đặt ẩn phụ (Phép thế Ravi):** Đối với các bài toán bất đẳng thức có điều kiện a, b, c là 3 cạnh của một tam giác, thông thường ta nên đưa về các biến dương không ràng buộc bằng cách đặt:

$$x = a + b - c > 0, \quad y = b + c - a > 0, \quad z = c + a - b > 0$$

Khi đó: $a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{x+y}{2}, c = \frac{y+z}{2}$.

Đồng thời vế trái có dạng tổng các phân thức $\frac{X^4}{Y}$ nên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức

Cauchy-Schwarz dạng $\frac{A^2}{B} \geq \frac{(\sum A)^2}{\sum B}$. Nhờ đó ta có lời giải dưới đây.

Đặt $x = a + b - c > 0; y = b + c - a > 0; z = c + a - b > 0$. Khi đó, mẫu số của vế trái (VT) trở thành:

$$\bullet b(b+c-a) = \frac{x+y}{2} \cdot y = \frac{xy+y^2}{2}$$

Biến đổi về trái của bất đẳng thức:

$$VT = \frac{\frac{x^4}{y^2+xy}}{2} + \frac{\frac{y^4}{z^2+yz}}{2} + \frac{\frac{z^4}{x^2+zx}}{2} = 2 \left(\frac{x^4}{y^2+xy} + \frac{y^4}{z^2+yz} + \frac{z^4}{x^2+zx} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức (Bunhiacópki dạng phân số):

$$\frac{x^4}{y^2+xy} + \frac{y^4}{z^2+yz} + \frac{z^4}{x^2+zx} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2) + (xy+yz+zx)}$$

Ta lại có một bất đẳng thức phụ quen thuộc: $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$. Do đó:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2) + (xy+yz+zx)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Suy ra:

$$VT \geq 2 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = x^2+y^2+z^2$$

Bây giờ ta khai triển $x^2+y^2+z^2$ theo a, b, c :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 \\ &= (a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca) + (b^2+c^2+a^2+2bc-2ca-2ab) + (c^2+a^2+b^2+2ca-2ab-2bc) \\ &= 3(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) = VP \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$. □

Câu 3. Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O) , đường cao MH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D .

(1) Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$ và ba điểm M, O, D thẳng hàng.

(2) Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}}$.

1.

- Ta dễ dàng chứng minh được $\widehat{AMH} = \widehat{BMD}$. (Kẻ đường kính MN của đường tròn (O)).
- Từ kết quả trên, ta có: $\widehat{AMH} + \widehat{HMD} = \widehat{BMD} + \widehat{HMD} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{BMH}$.
- Lại có $\widehat{BMH} = \widehat{BHF}$ (cùng phụ với $\widehat{MHF}$) nên $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$
- Để chứng minh tính chất quen thuộc $OM \perp EF$ (bằng cách vẽ tiếp tuyến tại đỉnh A và dùng tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Mà $MD \perp EF$ (giả thiết) nên M, O, D thẳng hàng. □

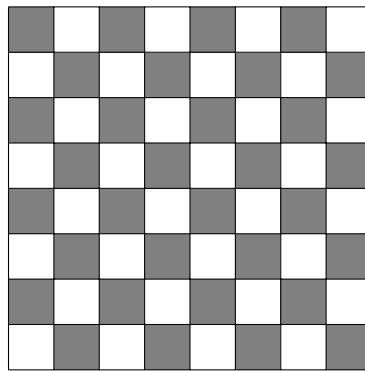
Câu 4. Một khu vực được chia thành lưới 8×8 gồm 64 ô vuông. Một số ô được đặt camera giám sát. Một ô không có camera gọi là được giám sát đầy đủ nếu tổng số camera nằm trên hàng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 8. Biết rằng mọi ô không có camera đều được giám sát đầy đủ. Hỏi: Có thể có nhiều nhất bao nhiêu ô không có camera?

Ta thấy: Tồn tại một hàng hoặc cột có số camera ít nhất, với k camera. Có thể giả sử đó là hàng D. Khi đó hàng D có $8 - k$ ô không có camera. Theo giả thiết, trên mỗi cột tương ứng có ít nhất $8 - k$ camera. Tổng số camera trên các cột tương ứng với những ô trống này ít nhất $(8 - k)^2$ camera. Các cột còn lại tương ứng với các ô có camera trên D có ít nhất k camera. Do đó tổng số camera trên các cột này ít nhất là k^2 camera.

Vậy tổng số camera trong khu vực ít nhất là $(8 - k)^2 + k^2 \geq \frac{8^2}{2} = 32$.

Suy ra số ô không có camera nhiều nhất là 32.

Một cách đặt tương ứng với số ô không có camera là 32 :



Trong hình trên ta đặt 32 camera vào ô đen và 32 ô trắng không có camera.

ĐỀ 8

LỜI GIẢI

Câu 1.

- a) Mỗi cạnh của một hình vuông được tô màu một cách ngẫu nhiên bởi một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng. Tính xác suất để hai cạnh kề nhau bất kì của hình vuông luôn khác màu.
- b) Trong hình bên, độ dài quãng đường AB là 5 km, độ dài quãng đường BC là 26 km, $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Một người có kế hoạch đi xe đạp, người đó đi thẳng từ A đến vị trí M trên đoạn thẳng BC với tốc độ 12 km/h, sau đó đi thẳng từ M đến C với tốc độ 13 km/h. Người đó cần chọn vị trí điểm M cách điểm B một khoảng bằng bao nhiêu km để tổng thời gian đi từ A đến M và từ M đến C là ít nhất?

a) Giả sử hình vuông cần tô là $ABCD$. Mỗi một cạnh có ba cách tô màu nên số cách tô màu các cạnh của hình vuông là $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Ta xác định số cách tô màu cạnh hình vuông để không có hai cạnh nào kề nhau cùng màu:

TH1. Nếu AD và BC được tô cùng màu, thì có ba cách chọn màu để tô hai đoạn thẳng này. Khi đó ta chỉ cần chọn màu khác màu của AD để tô cho AB và CD . Do đó mỗi cạnh AB và CD có 2 cách tô màu. Do đó có $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ cách tô màu.

TH2. Nếu AD và BC tô khác màu nhau. Khi đó AD có 3 cách tô màu, BC có hai cách tô màu. Vì AB và CD thì phải tô khác màu với cả AD và BC nên mỗi đoạn chỉ có 1 cách tô. Do đó có $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ cách tô.

Vậy số cách tô màu thoả mãn là $12 + 6 = 18$.

Xác suất để tô được hình vuông có hai cạnh kề nhau khác màu là:

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$$

□

b) Đặt $AM = x$ (km) ($x > 5$)

$$BM = \sqrt{x^2 - 25} \text{ (km)}$$

$$MC = 26 - \sqrt{x^2 - 25} \text{ (km)}$$

Tổng thời gian đi là:

$$\begin{aligned} T &= \frac{x}{12} + \frac{26 - \sqrt{x^2 - 25}}{13} \\ &= \frac{13x + 312 - 12\sqrt{x^2 - 25}}{156} \\ &= \frac{13x + 312 - 12\sqrt{(x-5)(x+5)}}{156} \\ &= \frac{9(x-5) - 2\sqrt{9(x-5) \cdot 4(x+5)} + 4(x+5) + 337}{156} \\ &= \frac{(3\sqrt{x-5} - 2\sqrt{x+5})^2 + 317}{156} \end{aligned}$$

$$T \geq \frac{317}{156}$$

Dấu “=” xảy ra khi $3\sqrt{x-5} = 2\sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow 9(x - 5) = 4(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow 9x - 45 = 4x + 20 \Leftrightarrow 5x = 65 \Leftrightarrow x = 13 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$MB = \sqrt{13^2 - 25} = 12 \text{ (km)}$$

□

Câu 2.

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$

b) Tìm tất cả các đa thức thỏa mãn điều kiện $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$P(1) = 1; \quad P(2) = 2; \quad P(3) = 4$$

a) Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 rồi cộng với phương trình (2):

$$2(xy - 3x - 2y) + (x^2 + y^2 - 2x - 4y) = 2 \cdot 16 + 33$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y = 65$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 8(x + y) - 65 = 0$$

Đặt $t = x + y$, phương trình trở thành: $t^2 - 8t - 65 = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 13)(t + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 13 \\ t = -5 \end{cases}$$

• **Trường hợp 1:** $x + y = 13 \Rightarrow y = 13 - x$

Thay vào (1): $x(13 - x) - 3x - 2(13 - x) = 16 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 42 = 0$

Vì $\Delta' = 6^2 - 42 = -6 < 0$ nên trường hợp này phương trình vô nghiệm.

• **Trường hợp 2:** $x + y = -5 \Rightarrow y = -5 - x$

Thay vào (1): $x(-5 - x) - 3x - 2(-5 - x) = 16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 6 = 0$

Có $\Delta' = 3^2 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{3}$

– Với $x = -3 + \sqrt{3} \Rightarrow y = -2 - \sqrt{3}$

– Với $x = -3 - \sqrt{3} \Rightarrow y = -2 + \sqrt{3}$

Kết luận: Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là:

$$(-3 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}) \text{ và } (-3 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$$

□

b) Rõ ràng nếu P và Q là hai đa thức thỏa điều kiện của đề bài thì $P(x) - Q(x)$ sẽ bằng 0 tại các điểm 1, 2, 3 và từ đó, ta có $P(x) - Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot H(x)$. Ngược lại nếu $P(x)$ là đa thức thỏa mãn điều kiện của đề bài thì các đa thức $Q(x) = P(x) + (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot H(x)$ cũng thỏa mãn điều kiện đề bài với mọi $H(x)$. Từ đó có thể thấy rằng có vô số các đa thức thỏa mãn điều kiện đề bài.

Ta đặt ra câu hỏi: Trong các đa thức thỏa mãn điều kiện đề bài, hãy tìm đa thức có bậc nhỏ nhất. Rõ ràng đa thức này không thể là hằng số, cũng không thể là bậc nhất. Ta thử tìm bậc tiếp theo là bậc 2.

Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c$ là đa thức thoả mãn điều kiện đề bài. Khi đó:

$$P(1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$$

$$P(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2$$

$$P(3) = 4 \Rightarrow 9a + 3b + c = 4$$

Giải hệ này ra ta được $(a, b, c) = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$, ta được $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ là đa thức bậc nhỏ nhất thoả mãn điều kiện. Và theo như lý luận ở trên, mọi nghiệm của bài toán sẽ có dạng:

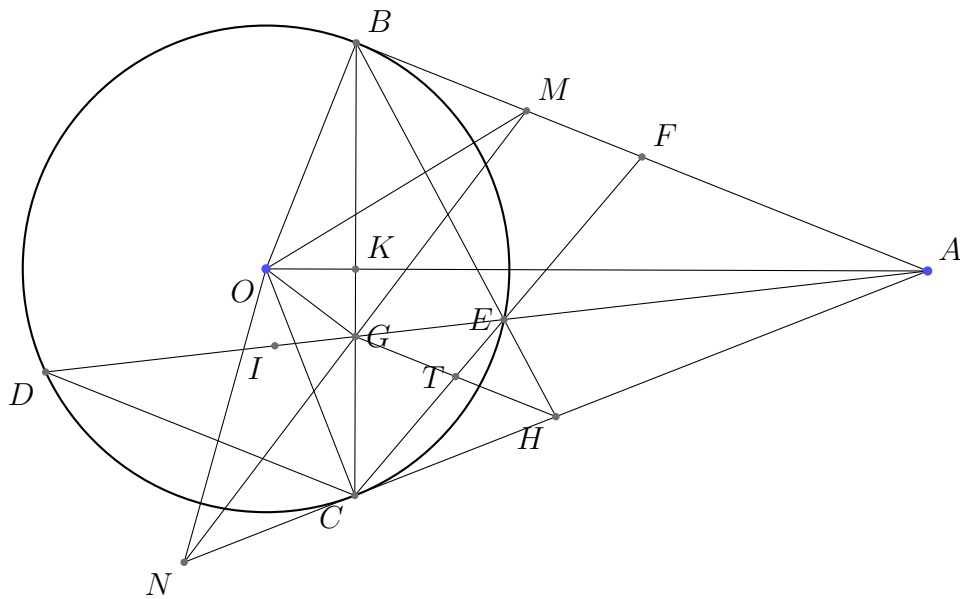
$$Q(x) = P(x) + (x-1)(x-2)(x-3)H(x)$$

với $H(x)$ là một đa thức tuỳ ý.

□

Câu 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB . Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác D và cắt BC tại G . Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N .

- Chứng minh tam giác OMN cân.
- Gọi I là trung điểm của DE , OA cắt BC tại K . Chứng minh: $IE^2 = IA \cdot IG$.
- Tia BE cắt AC ở H . Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG .



- Tứ giác $OGMB$ nội tiếp đường tròn đường kính $MO \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{OBG}$.
Tứ giác $OGCN$ nội tiếp đường tròn đường kính $NO \Rightarrow \widehat{ONG} = \widehat{OCG}$.
Mặt khác tam giác OBC cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{ONG} \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại O .
- Ta có: $\widehat{AKG} = \widehat{AIO} = 90^\circ \Rightarrow \triangle AKG \sim \triangle AIO$ (g.g) $\Rightarrow AG \cdot AI = AK \cdot AO$.
Mặt khác, dễ dàng chứng minh được: $AK \cdot AO = AB^2$ và $AB^2 = AE \cdot AD \Rightarrow AG \cdot AI = AE \cdot AD$.
Khi đó: $AG \cdot AI = (AI - IE)(AI + IE) = AI^2 - IE^2 \Rightarrow IE^2 = AI^2 - AG \cdot AI = IG \cdot IA$.
- Gọi T là giao điểm của HG và CE . Ta có: $\widehat{BED} = \widehat{BCD} = \widehat{CBA} = \widehat{ACB} \Rightarrow HEGC$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{HGC} = \widehat{HEC} = \widehat{CDB} = \widehat{CBA}.$$

Đến đây ta chứng minh hai đường thẳng HG, AB song song với nhau.

Kéo dài CE cắt AB tại F .

Dễ thấy: $\widehat{FAE} = \widehat{EDC} = \widehat{ECA} \Rightarrow \triangle FAE \sim \triangle FCA$ (g.g) $\Rightarrow FA^2 = FE \cdot FC$.

Mà $FB^2 = FE \cdot FC$ nên $FA = FB \Rightarrow F$ là trung điểm của AB .

Theo định lý Thales, ta có: $\frac{TG}{FB} = \frac{CT}{CF} = \frac{TH}{FA} \Rightarrow TG = TH$ hay T là trung điểm của GH . $\square$

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = -2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2}{a^3 + b^3 + c^3} &= \frac{3a(b+c) + 3bc - (a+b+c)^2}{a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c)} = \frac{-3a^2 + 3bc}{3abc} \\ &= -\frac{a^2 + \frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{2} \left[(a-1)^2 + \frac{2(a-1)^2}{a} + 3 \right] \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = -2$ và các hoán vị $\square$

Câu 5.

- Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.
- Gọi $X = \{1, 2, \dots, 2003\}$. Lấy số tự nhiên $n \geq 1$ và $n \leq 2003$ sao cho nếu lấy tập hợp con gồm n phần tử của X , thì ta có thể tìm được một phần tử là lũy thừa của 2 hoặc 2 phần tử có tổng là lũy thừa của 2. Chứng minh rằng: $n \geq 999$.

a) Giả sử $a = 2^x \cdot 5^y$ với $x, y \in \mathbb{N}$.

• **Điều kiện 1 ($2a$ là số lập phương):**

Ta có $2a = 2^{x+1} \cdot 5^y$. Để đây là số lập phương, các số mũ phải chia hết cho 3:

$$\begin{cases} x+1 \vdots 3 \implies x \equiv 2 \pmod{3} \\ y \vdots 3 \end{cases}$$

• **Điều kiện 2 ($5a$ là số chính phương):**

Ta có $5a = 2^x \cdot 5^{y+1}$. Để đây là số chính phương, các số mũ phải chia hết cho 2:

$$\begin{cases} x \vdots 2 \\ y+1 \vdots 2 \implies y \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

• **Tìm giá trị nhỏ nhất của x và y :**

- Số tự nhiên nhỏ nhất vừa chia hết cho 2, vừa chia 3 dư 2 $\implies x = 2$.
- Số tự nhiên nhỏ nhất vừa chia hết cho 3, vừa là số lẻ (chia 2 dư 1) $\implies y = 3$.

Kết luận:

Số nguyên dương a nhỏ nhất cần tìm là:

$$a = 2^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$$

□

b) Xét tập $A = \{5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 44\}$ và $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1025 \leq n \leq 2003\}$.

Xét tập $C = A \cup B$. Dễ thấy $|C| = 998$.

Các phần tử trong B nằm giữa 2^{10} và 2^{11} nên không thể là lũy thừa của 2 và $\forall x \neq y; x, y \in B$ thì $2^{11} < x + y < 2^{12}$ nên tổng $x + y$ cũng không thể là lũy thừa của 2.

Với $x \in A$ và $y \in B$ thì $1030 \leq x + y \leq 2047$ nên tổng $x + y$ cũng không là lũy thừa của 2.

Dễ kiểm tra các phần tử của A không là lũy thừa của 2 và tổng của 2 số bất kỳ trong số chúng cũng vậy.

$\Rightarrow \forall n \leq 998$ ta chỉ cần lấy một tập con n phần tử của C thì tập này sẽ không có phần tử nào và cũng không có tổng của 2 phần tử nào là lũy thừa của 2.

$\Rightarrow n \geq 999$.

□

ĐỀ 9

LỜI GIẢI

Câu 1.

- a) Cho đa thức $P(x)$ có các hệ số là các số nguyên và $P(17) = 10; P(24) = 17$. Biết a, b là hai số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = a + 3$ và $P(b) = b + 3$. Tính giá trị của biểu thức ab .
- b) Giải phương trình:

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{2\sqrt{x^2+7x+1}}{x+1}$$

a) Với đa thức $P(x)$ hệ số nguyên, ta có tính chất quan trọng: Với mọi số nguyên x, y phân biệt, $(x - y) \mid [P(x) - P(y)]$.

Áp dụng tính chất này cho các cặp $(17, a)$ và $(24, a)$:

- $(17 - a) \mid [P(17) - P(a)] \implies (17 - a) \mid [10 - (a + 3)] \implies (17 - a) \mid (7 - a)$
Mà $7 - a = (17 - a) - 10$, suy ra $(17 - a) \mid 10$.
- $(24 - a) \mid [P(24) - P(a)] \implies (24 - a) \mid [17 - (a + 3)] \implies (24 - a) \mid (14 - a)$
Mà $14 - a = (24 - a) - 10$, suy ra $(24 - a) \mid 10$.

Thay vì cố gắng tìm đa thức $P(x)$ (điều không thể), hãy dùng tính chất chia hết đặc trưng $(x - y) \mid (P(x) - P(y))$ để biến đổi sao cho triệt tiêu ẩn, đưa về bài toán tìm ước số của một hằng số (ở đây là số 10).

Lập luận tương tự cho b , ta cũng có $(17 - b) \mid 10$ và $(24 - b) \mid 10$.

Gọi x là giá trị đại diện cho a hoặc b . Ta cần tìm x sao cho $17 - x$ và $24 - x$ đều là ước của 10.

Nhận xét: Hiệu của 2 ước số này là: $(24 - x) - (17 - x) = 7$.

Các ước của 10 gồm: $\{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$.

Hai ước của 10 có hiệu bằng 7 chỉ có thể là cặp $(5, -2)$.

Do đó:

$$\begin{cases} 24 - x = 5 \\ 17 - x = -2 \end{cases} \implies x = 19$$

Hoặc cặp thứ hai là $(2, -5)$:

$$\begin{cases} 24 - x = 2 \\ 17 - x = -5 \end{cases} \implies x = 22$$

Vì a, b phân biệt nên vai trò của a, b là 19 và 22.

Vậy $ab = 19 \times 22 = 418$. □

b) Điều kiện: $x > 0$.

Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{2\sqrt{x^2+7x+1}}{x+1}$$

Chia cả tử và mẫu của phân thức ở vế phải cho $\sqrt{x} > 0$, ta được:

$$\frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{2\sqrt{\frac{x^2+7x+1}{x}}}{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$$

$$\iff \frac{3(x+1)}{\sqrt{x}} = 3 + \frac{2\sqrt{x+7+\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$$

Đặt $t = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $\sqrt{x}$ và $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ta có $t \geq 2$.

Ta cũng có: $t^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} \implies x + \frac{1}{x} = t^2 - 2$.

Khi đó: $x + \frac{1}{x} + 7 = (t^2 - 2) + 7 = t^2 + 5$.

Phương trình trở thành:

$$3t = 3 + \frac{2\sqrt{t^2+5}}{t}$$

$$\iff 3t^2 - 3t = 2\sqrt{t^2+5}$$

Vì $t \geq 2$ nên $3t(t-1) > 0$, hai vế của phương trình đều dương. Bình phương hai vế ta được:

$$(3t^2 - 3t)^2 = 4(t^2 + 5)$$

$$\iff 9t^4 - 18t^3 + 9t^2 = 4t^2 + 20$$

$$\iff 9t^4 - 18t^3 + 5t^2 - 20 = 0$$

Nhằm thấy phương trình có nghiệm $t = 2$, ta thực hiện phân tích nhân tử bằng cách tách các hạng tử:

$$\iff (9t^4 - 18t^3) + (5t^2 - 10t) + (10t - 20) = 0$$

$$\iff 9t^3(t-2) + 5t(t-2) + 10(t-2) = 0$$

$$\iff (t-2)(9t^3 + 5t + 10) = 0$$

Vì $t \geq 2$ nên $9t^3 + 5t + 10 > 0$. Do đó, phương trình chỉ có nghiệm duy nhất:

$$t - 2 = 0 \iff t = 2$$

Với $t = 2$, trả lại biến x ta có:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2 \iff x+1 = 2\sqrt{x} \iff (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$$

Đối chiếu điều kiện $x > 0$, ta thấy $x = 1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Câu 2. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn tính chất sau:

- a) $n! \vdots (n^2 + 1)$
- b) $n^2 + 1 \nmid n!$

a) Trước tiên chọn $n = 2m^2$, như cần chọn m sao cho

$$(2m^2)^2 + 1 = (2m^2 - 2m + 1)(2m^2 + 2m + 1)$$

là ước của $(2m^2)!$. Tuy nhiên chú ý rằng $\text{UCLN}(2m^2 - 2m + 1, 2m^2 + 2m + 1) = 1$ và $2m^2 - 2m + 1 < 2m^2$ nên chỉ cần chọn m thỏa mãn

$$2m^2 + 2m + 1 \mid (2m^2)!.$$

Tới đây chỉ cần chọn $m = 5k + 1$ là xong.

b) Xét tập hợp $\mathcal{A}$ gồm các số nguyên tố p , sao cho tồn tại n_p thỏa mãn $p \mid n_p^2 + 1$. Ta sẽ chứng minh tập $\mathcal{A}$ có vô hạn phần tử bằng phản chứng, giả sử $\mathcal{A}$ chỉ có hữu hạn phần tử, khi đó số

$$\left(\prod_{p \in \mathcal{A}} p \right)^2 + 1$$

phải có một ước nguyên tố không thuộc tập $\mathcal{A}$ (mâu thuẫn).

Xét một số nguyên tố $p \in \mathcal{A}$, từ định nghĩa đề ra ban đầu thì có thể chọn $r_p \equiv n_p \pmod{p}$, dẫn đến

$$r_p < p \quad \text{và} \quad p \mid r_p^2 + 1.$$

Từ đây suy ra ứng với mỗi p thì $r_p^2 + 1$ không phải ước của $r_p!$, vì có vô hạn số nguyên tố p nên ta hoàn tất chứng minh. $\square$

Câu 3. Với các số thực không âm $a; b; c$ sao cho $a + b + c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4a + 4b + c} + \frac{b}{4b + 4c + a} + \frac{c}{4c + 4a + b} \leq \frac{1}{3}$$

Ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} & \frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c} + \frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a} + \frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b} \leq \frac{4(a+b+c)}{3} \\ & a + \frac{3ca}{4a+4b+c} + b + \frac{3ab}{4b+4c+a} + c + \frac{3bc}{4c+4a+b} \leq a+b+c + \frac{a+b+c}{3} \\ & \frac{ca}{4a+4b+c} + \frac{ab}{4b+4c+a} + \frac{bc}{4c+4a+b} \leq \frac{a+b+c}{9} \end{aligned}$$

Nhận xét rằng nếu $ab + bc + ca = 0$ thì bất đẳng thức của ta là hiển nhiên. Dưới đây ta sẽ xét với $ab + bc + ca > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} \frac{ca}{4a+4b+c} & \leq \frac{ca}{(2a+b) + (2a+b) + (2b+c)} \leq \frac{ca}{9} \left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} \right) \\ & = \frac{ca}{9} \left(\frac{2}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} \right) \end{aligned}$$

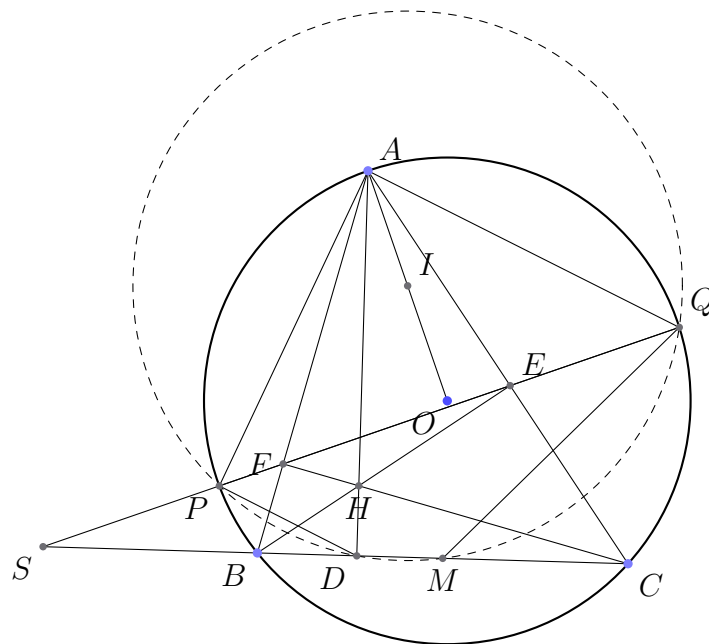
Suy ra

$$\begin{aligned} VT &\leq \frac{1}{9} \sum \left(\frac{2ca}{2a+b} + \frac{ca}{2b+c} \right) = \frac{1}{9} \left(\sum \frac{2ca}{2a+b} + \sum \frac{ca}{2b+c} \right) = \frac{1}{9} \sum \left(\frac{2ca}{2a+b} + \frac{bc}{2a+b} \right) \\ &= \frac{1}{9} \sum \frac{c(2a+b)}{2a+b} = \frac{a+b+c}{9} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 2b, c = 0$ cùng các hoán vị tương ứng. $\square$

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định không đi qua tâm O . Điểm A di động trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt $(O; R)$ tại hai điểm P và Q (điểm F nằm giữa hai điểm P và E). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh:

- $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.
- Bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc một đường tròn (ω) .
- Tâm I của đường tròn (ω) chạy trên một đường tròn cố định.



a) Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AFQ} = \widehat{ACB}$.
Suy ra số đo $AQ + số đo PB = số đo AB$, tức là $AQ = AP$ (cung ở đây ta hiểu là cung nhỏ).
Vì thế $AP = AQ$.

Do $\triangle ADB \sim \triangle AFH$ nên $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AD \cdot AH$.

Xét hai tam giác AFP và APB , ta có: $\widehat{FAP} = \widehat{PAB}$; $\widehat{APF} = \widehat{ABP}$ (do $AQ = AP$).
Suy ra $\triangle AFP \sim \triangle APB$, do đó $\frac{AP}{AF} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow AB \cdot AF = AP^2$.

Vậy $AP^2 = AQ^2 = AD \cdot AH$.

b)
Gọi S là giao điểm của đường thẳng EF và BC . Do tứ giác $BCQP$ nội tiếp nên $\triangle SPB \sim \triangle SCQ$,

$$\text{suy ra } \frac{SB}{SP} = \frac{SQ}{SC} \Rightarrow SP.SQ = SB.SC.$$

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\triangle SBF \sim \triangle SEC$, suy ra $\frac{SB}{SF} = \frac{SE}{SC} \Rightarrow SB.SC = SF.SE$.

Do đó $SP.SQ = SF.SE$ (1).

Do tam giác CFM cân tại M nên $\widehat{BMF} = 2\widehat{BCF}$.

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{FEB} = \widehat{BCF}$.

Do tứ giác $CDHE$ nội tiếp nên $\widehat{HED} = \widehat{BCF}$.

Suy ra $\widehat{DEF} = \widehat{HED} + \widehat{FEB} = 2\widehat{BCF}$. Do đó $\widehat{DMF} = \widehat{BMF} = \widehat{DEF}$, suy ra bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn.

Do bốn điểm D, M, E, F nằm trên một đường tròn nên $\triangle SDF \sim \triangle SEM$, suy ra $\frac{SD}{SF} = \frac{SE}{SM} \Rightarrow SF.SE = SD.SM$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $SP.SQ = SD.SM$. Vậy bốn điểm P, D, M, Q nằm trên cùng một đường tròn.

c)

Do $AP = AQ$ nên AO là đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Mà PQ là dây cung của đường tròn (ω) nên điểm I nằm trên đường thẳng AO .

Do DM là dây cung của đường tròn (ω) nên điểm I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng DM .

Do tứ giác $ADMO$ là hình thang vuông với hai đáy là OM, AD nên đường trung trực của đoạn thẳng DM đi qua trung điểm của đoạn thẳng AO .

Do đó I là trung điểm của đoạn thẳng AO . Suy ra $OI = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Vậy I chạy trên đường tròn tâm O bán kính $\frac{1}{2}R$. □

Câu 5. Xét bảng $2 \times n$ với n nguyên dương. Trong mỗi ô vuông của bảng có đúng một viên bi. Mỗi lần người ta chọn ra hai ô vuông có chứa bi rồi chuyển từ mỗi ô vuông đó một viên bi sang ô vuông kề với nó (ô kề là ô có chung cạnh). Tìm tất cả các giá trị có thể của n để có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng một ô sau hữu hạn các thao tác.

Tô màu các ô vuông của bảng đen trắng xen kẽ gồm n ô đen và n ô trắng. Ta thấy rằng các viên bi ở ô đen sẽ được chuyển sang ô trắng và ngược lại. Như vậy, mỗi lần chuyển bi thì tổng số bi ở các ô trắng hoặc không đổi, hoặc tăng 2 hoặc giảm 2. Vì vậy nên tổng số bi ở các ô trắng không thay đổi tính chẵn lẻ, tương tự với các ô đen. Xét hai trường hợp sau:

- Nếu n lẻ thì tổng số bi trong các ô trắng và tổng số bi trong các ô đen lúc đầu là số lẻ nên trong suốt quá trình tổng số bi ở các ô trắng và tổng số bi ở các ô đen cũng luôn là số lẻ. Điều này có nghĩa là không thể chuyển hết bi về cùng một ô (vì khi tất cả bi về một ô thì ô đó chứa $2n$ viên bi - là số chẵn, các ô còn lại chứa 0 bi - cũng là số chẵn).
- Nếu $n = 2k$ chẵn thì ta có thể thực hiện thao tác chuyển bi như sau: ta lần lượt chuyển tất cả bi từ các cột $k-1, k-1, \dots, 1$ về cột k và chuyển tất cả bi từ các cột $k+2, k+3, \dots, 2k$ về cột $k+1$. Khi đó ta có bảng hình vuông cỡ 2×2 tạo bởi hai cột $k, k+1$ chứa tất cả các bi.

Bước tiếp theo thì chuyển tất cả bi ở hai ô vuông nằm trên đường chéo của hình vuông này sang các ô bên cạnh thì khi đó bi chỉ nằm trên hai ô vuông thuộc đường chéo còn lại của hình vuông này. Cuối cùng thì chuyển bi ở hai ô vuông này sang cùng một trong hai ô còn lại thì tất cả các viên bi sẽ về cùng một ô. $\square$

ĐỀ 10

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x = y^3 + 3y^2 + 4y + 2 \\ \sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{y+12-6\sqrt{y+3}} = 1 \end{cases}$$

1. Bằng các phép biến đổi biểu thức kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c} &\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{a+b-c} \\ &\Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = a + b + 2\sqrt{c(a+b-c)} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{c(a+b-c)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ (a+b-c) = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}.$$

Ta biến đổi tương đương đẳng thức này kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{a+b-c} \\ &\Leftrightarrow a + b + 3\left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = a + b + 3\left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) = \left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)} + \sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right) \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối đúng với điều kiện $(*)$ nên đẳng thức đầu đúng.

Bài toán được chứng minh.

b) Điều kiện xác định:

- $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
- $y + 3 \geq 0 \Rightarrow y \geq -3$

Ta biến đổi phương trình thứ nhất bằng cách ghép nhóm để xuất hiện nhân tử chung:

$$\begin{aligned} x^3 + x &= y^3 + 3y^2 + 4y + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) + x - (y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - (y + 1)^3 + (x - y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai lập phương $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x - y - 1)[x^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2] + (x - y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y - 1)[x^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 + 1] = 0 \end{aligned}$$

Ta xét biểu thức trong ngoặc vuông:

$$x^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2 + 1 = \left(x + \frac{y + 1}{2}\right)^2 + \frac{3(y + 1)^2}{4} + 1$$

Vì bình phương của một số luôn không âm, nên biểu thức trên luôn lớn hơn 0 với mọi x, y . Do đó, phương trình chỉ có thể xảy ra khi:

$$x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Ta đưa các biểu thức dưới dấu căn về dạng hằng đẳng thức bình phương một hiệu:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x + 2) - 4\sqrt{x + 2} + 4} + \sqrt{(y + 3) - 6\sqrt{y + 3} + 9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x + 2} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{y + 3} - 3)^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x + 2} - 2| + |\sqrt{y + 3} - 3| = 1 \end{aligned}$$

Thay $x = y + 1$ vào phương trình trên, ta được:

$$|\sqrt{y + 3} - 2| + |\sqrt{y + 3} - 3| = 1$$

Đổi dấu trong trị tuyệt đối thứ hai (vì $|A| = |-A|$), ta có:

$$|\sqrt{y + 3} - 2| + |3 - \sqrt{y + 3}| = 1$$

Áp dụng tính chất quen thuộc của giá trị tuyệt đối $|A| + |B| \geq |A + B|$, ta có:

$$|\sqrt{y + 3} - 2| + |3 - \sqrt{y + 3}| \geq |\sqrt{y + 3} - 2 + 3 - \sqrt{y + 3}| = 1$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi hai biểu thức cùng dấu ($A \cdot B \geq 0$):

$$\begin{aligned} &(\sqrt{y + 3} - 2)(3 - \sqrt{y + 3}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{y + 3} - 2)(\sqrt{y + 3} - 3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{y + 3} \leq 3 \end{aligned}$$

Bình phương các vế (do tất cả đều dương):

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4 \leq y + 3 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq y \leq 6 \end{aligned}$$

Kết luận

Với $1 \leq y \leq 6$ và $x = y + 1$, các điều kiện ban đầu ($x \geq -2, y \geq -3$) hoàn toàn được thỏa mãn. Hệ phương trình có vô số nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ 1 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

□

Câu 2. Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x + y + z)$.

- Chứng minh rằng $x + y + z$ chia hết cho 6.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

a) Ta có: $x^3 - x = (x - 1)x(x + 1) \equiv 0 \pmod{6}$ (trong 3 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 3 và 1 số chia hết cho 2).

Tương tự suy ra: $x + y + z \equiv x^3 + y^3 + z^3 \pmod{6} \equiv 18(x + y + z) \pmod{6} \equiv 0 \pmod{6}$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có: $162(x + y + z) = 9(x^3 + y^3 + z^3) = (1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1)(x^3 + y^3 + z^3) \geq (x + y + z)^3$.
Suy ra $162 \geq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow x + y + z \leq \sqrt{162} < 13$.

Mặt khác $x + y + z$ là số nguyên dương chia hết cho 6 nên $x + y + z = 6$ hoặc $x + y + z = 12$.

TH1: $x + y + z = 6$.

Giả sử $z = \max(x, y, z)$.

Khi đó $108 = x^3 + y^3 + z^3 > z^3 \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \frac{108}{3} = 36$.

Từ đó suy ra $z = 4 \Rightarrow x + y = 2$ nên $x = y = 1$.

Khi đó $x^3 + y^3 + z^3 = 1^3 + 1^3 + 4^3 = 66$ (không thỏa mãn).

TH2: $x + y + z = 12$.

Giả sử $z = \max(x, y, z)$.

Khi đó $216 = x^3 + y^3 + z^3 > z^3 \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = \frac{216}{3} = 72$.

Từ đó suy ra $z = 5 \Rightarrow x + y = 7, x^3 + y^3 = 91$.

Ta có $91 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = 7 \cdot (49 - 3xy)$.

Suy ra $xy = 12$. Kết hợp với $x + y = 7$ thì (x, y) là hoán vị của $(3, 4)$. Ta nhận thấy bộ (x, y, z) là hoán vị của $(3, 4, 5)$ thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x + y + z)$.

Vậy giá trị lớn nhất của xyz là $3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ xảy ra khi và chỉ khi (x, y, z) là hoán vị của $(3, 4, 5)$. $\square$

Câu 3. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Dựng đường cao AD của tam giác và đường kính AK của (O) . Hạ BE, CF lần lượt vuông góc với AK .

- Chứng minh rằng: $ABDE, ACFD$ là các tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ và $DF \perp AB$.
- Cho BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Chứng minh rằng: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là một điểm cố định.

a, Vì $\angle ABD = \angle AEB = 90^\circ$ suy ra 4 điểm A, B, D, E nằm trên đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm N của AB .

$\angle ADC = \angle AFC = 90^\circ$ nên 4 điểm A, D, F, C nằm trên đường tròn đường kính AC có tâm là trung điểm P của AC .

b, Do tứ giác $ADFC$ nội tiếp nên: $\angle DFA = \angle DCA$ cùng chắn cung AD .

Ta có $\angle DEF = 90^\circ - \angle BED = 90^\circ - \angle BAD = \angle ABD$. Từ đó suy ra $\triangle ABC \sim \triangle ADEF$ (g.g).

Ta có: $\angle DFA = \angle DCA = \angle BKA \Rightarrow BK \parallel DF$ mà $BK \perp AB \Rightarrow DF \perp AB$.

c, Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của BO thì $ON \perp AB, OM \perp BC$ suy ra 5 điểm N, O, E, M, B nằm trên đường tròn đường kính BO . Ta có:

$\angle MNE = \angle MBE = \angle DBE = \angle DAE = \frac{1}{2}\angle DNE$ suy ra MN là tia phân giác của góc DNE .

Tam giác DNE cân tại N suy ra MN cũng là trung trực của DE , tương tự ta cũng có MP là trung

ĐỀ 11

LỜI GIẢI

Câu 1.

- a) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{a + 2(\sqrt{bc} - 1)} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{b + 2(\sqrt{ac} - 1)} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c + 2(\sqrt{ab} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

- b) Trong một buổi sinh hoạt tập thể, một trường trung học cơ sở có 2026 học sinh tham gia. Nhà trường chuẩn bị hai loại ghế dài để xếp chỗ ngồi: Ghế loại I: mỗi ghế ngồi được 5 học sinh; Ghế loại II: mỗi ghế ngồi được 8 học sinh. Biết rằng toàn bộ 2026 học sinh đều được xếp ngồi vừa đủ, không thừa chỗ, không thiếu chỗ. Hỏi nhà trường cần bố trí số ghế mỗi loại là bao nhiêu để tổng số ghế là nhỏ nhất.

a) Từ giả thiết: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3 \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = 9$

$$\Leftrightarrow a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 9$$

Thay $a + b + c = 5$ vào, ta được:

$$5 + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 9 \Rightarrow 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = 4 \Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 2$$

Xét mẫu số thứ nhất: $M_1 = a + 2(\sqrt{bc} - 1)$

Thay số $2 = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ vào biểu thức:

$$M_1 = a + 2\sqrt{bc} - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = a + \sqrt{bc} - \sqrt{ab} - \sqrt{ca}$$

$$M_1 = \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - \sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})$$

Tương tự cho hai mẫu số còn lại:

- $M_2 = b + 2(\sqrt{ac} - 1) = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$
- $M_3 = c + 2(\sqrt{ab} - 1) = (\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b})$

$$VT = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b})}$$

- Ta có: $\sqrt{c} - \sqrt{b} = (\sqrt{c} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})$

Khi đó, phân thức thứ nhất được tách thành:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})} &= \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{-(\sqrt{a} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c})} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{c}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{c}} \end{aligned}$$

Tương tự, ta được:

- Phân thức thứ hai: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{-(\sqrt{c} - \sqrt{a})}{-(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$
(chưa rút gọn ngay được, tí nhóm sau)
- Phân thức thứ ba: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$

Khi đó:

$$VT = \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

Nhóm phân thức thứ 2 và thứ 4 lại với nhau (chung mẫu $\sqrt{a} - \sqrt{c}$):

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$$

Bây giờ VT chỉ còn lại 3 phân thức:

$$VT = \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})}$$

Quy đồng hai phân thức cuối (mẫu chung $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$):

$$\begin{aligned} VT &= \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{c} - \sqrt{a})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{-(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{-2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \end{aligned}$$

Đổi dấu ở mẫu để ra đúng về phải:

$$VT = \frac{2}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = VP \text{ (đpcm)}$$

□

b)

Gọi số ghế loại I là x và số ghế loại II là y ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$5x + 8y = 2026$$

Tổng số ghế là $S = x + y$. Ta cần tìm x, y sao cho S đạt giá trị **nhỏ nhất**.

Từ phương trình, ta rút ra $5x$:

$$5x = 2026 - 8y \Rightarrow 5x + 5y = 2026 - 3y \Rightarrow 5(x + y) = 2026 - 3y$$

$$S = x + y = \frac{2026 - 3y}{5}$$

Để S nhỏ nhất thì hiệu $(2026 - 3y)$ phải nhỏ nhất, tức là $3y$ phải **lớn nhất** có thể.

Vì $x \geq 0 \Rightarrow 5x \geq 0 \Rightarrow 8y \leq 2026 \Rightarrow y \leq 253,25$. Do y nguyên nên $y \leq 253$.

Từ $5x = 2026 - 8y$, vì $5x$ có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5, nên $2026 - 8y$ cũng phải có tận cùng là 0 hoặc 5.

- Chữ số tận cùng của 2026 là 6.
- Để hiệu có tận cùng là 0 hoặc 5, thì $8y$ phải có chữ số tận cùng là 6 hoặc 1 ($8y$ không thể tận cùng là 1 vì là số chẵn). Do đó, $8y$ có tận cùng là 6.
- Suy ra y phải có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7.

Vì ta cần y lớn nhất và $y \leq 253$, số lớn nhất thỏa mãn có tận cùng là 2 hoặc 7 chính là $y = 252$.

Thay $y = 252$ vào phương trình ban đầu:

$$5x + 8(252) = 2026$$

$$5x + 2016 = 2026 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận:

Nhà trường cần bố trí **2 ghế loại I** và **252 ghế loại II** để tổng số ghế là nhỏ nhất ($2 + 252 = 254$ ghế). $\square$

Câu 2.

- Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .
- Xác định tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho tồn tại các số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{p} \quad \text{và} \quad a + b + c = p(q + 1)$$

a) Ta có: $ab - b + 1 \mid abc + 1$.

Để triệt tiêu abc , ta nhân biểu thức chia với c :

$$c(ab - b + 1) = abc - bc + c$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (abc + 1) - (abc - bc + c) &= bc - c + 1 \\ \Rightarrow ab - b + 1 &\mid bc - c + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhân biểu thức $bc - c + 1$ với a :

$$a(bc - c + 1) = abc - ac + a$$

Lại lấy hiệu với $abc + 1$:

$$\begin{aligned} (abc - ac + a) - (abc + 1) &= a - ac - 1 = -(ac - a + 1) \\ \Rightarrow ab - b + 1 &\mid ac - a + 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $a > 1, c > 1$ nên $ac - a + 1 = a(c - 1) + 1 > 0$.

Do biểu thức (2) là phép chia hết cho một số dương nên ta giả sử $ac - a + 1 = q(ab - b + 1)$ với $q \in \mathbb{N}^*$.

- Nếu $q \geq 2$:

$$ac - a + 1 \geq 2(ab - b + 1) \Leftrightarrow a(c - 1) + 1 \geq 2b(a - 1) + 2$$

Vì đề cho $b > c \Rightarrow c - 1 \leq b - 2$.

Suy ra: $a(b - 2) + 1 \geq a(c - 1) + 1 \geq 2b(a - 1) + 2$

$$\Leftrightarrow ab - 2a + 1 \geq 2ab - 2b + 2 \Leftrightarrow 2b - 2a - 1 \geq ab$$

Vì $a \geq 2$ nên $ab \geq 2b$. Thay vào ta có: $2b - 2a - 1 \geq 2b \Leftrightarrow -2a - 1 \geq 0$ (Vô lý vì $a > 1$).

- Vậy bắt buộc $q = 1$:

$$ac - a + 1 = ab - b + 1$$

$$\Leftrightarrow ac - a = ab - b \Leftrightarrow b - a = ab - ac$$

$$\Leftrightarrow b - a = a(b - c) \Leftrightarrow b = a + a(b - c) = a(1 + b - c)$$

Vì b, c là các số tự nhiên nên $(1 + b - c)$ là một số nguyên.

Từ đó suy ra b chia hết cho a . (**đpcm**)

□

b) Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{p}$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$), ta thấy ngay $a > p, b > p, c > p$.

Quy đồng giả thiết, ta có: $p(ab + bc + ca) = abc$.

Xét:

$$P = (a - p)(b - p)(c - p) = abc - p(ab + bc + ca) + p^2(a + b + c) - p^3$$

Thay $abc = p(ab + bc + ca)$:

$$P = p^2(a + b + c) - p^3$$

Thay tiếp giả thiết $a + b + c = p(q + 1)$:

$$P = p^2 \cdot p(q + 1) - p^3 = p^3q + p^3 - p^3 = p^3q$$

Vậy ta có phương trình nghiệm nguyên: $(a - p)(b - p)(c - p) = p^3q$.

Đặt $x = a - p, y = b - p, z = c - p$. Vì $a, b, c > p$ nên $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} xyz = p^3q \\ x + y + z = (a + b + c) - 3p = p(q + 1) - 3p = p(q - 2) \end{cases}$$

Do $x, y, z \geq 1 \Rightarrow x + y + z \geq 3 \Rightarrow p(q - 2) \geq 3 \Rightarrow q > 2$. Vì q nguyên tố nên $q \geq 3$.

Vì q nguyên tố nên trong 3 số x, y, z phải có đúng 1 số chứa nhân tử q . Giả sử đó là x . Phân tích p^3q thành 3 nhân tử, ta xét các trường hợp của bộ (x, y, z) (chỉ cần xét đại diện vì vai trò như nhau):

- **TH1:** $(p^3q, 1, 1) \Rightarrow$ Tổng $x + y + z = p^3q + 2$.
Ép vào tổng đã biết: $p^3q + 2 = pq - 2p \Leftrightarrow pq(p^2 - 1) + 2p + 2 = 0$ (Vô lý vì $VT > 0$).
- **TH2:** $(p^2q, p, 1) \Rightarrow$ Tổng $p^2q + p + 1 = pq - 2p \Leftrightarrow pq(p - 1) + 3p + 1 = 0$ (Vô lý).
- **TH3:** $(pq, p^2, 1)$ và $(pq, p, p) \Rightarrow$ Tương tự, cộng lại đều ra phương trình vô nghiệm.
- **TH4:** $(q, p^3, 1)$ và (q, p^2, p)

– Khả năng 1: $(q, p^2, p) \Rightarrow$ Tổng $q + p^2 + p = pq - 2p \Leftrightarrow q(p - 1) = p^2 + 3p$

$$\Rightarrow q = \frac{p^2 + 3p}{p - 1} = \frac{p^2 - p + 4p - 4 + 4}{p - 1} = p + 4 + \frac{4}{p - 1}.$$

Để q nguyên thì $p - 1$ là ước của 4 $\Rightarrow p \in \{2, 3, 5\}$. Thử vào điều kiện cho q không phải số nguyên tố (loại).

$$- \text{ Khả năng 2: } (q, p^3, 1) \Rightarrow \text{ Tổng } q + p^3 + 1 = pq - 2p \Leftrightarrow q(p-1) = p^3 + 2p + 1 \\ \Rightarrow q = \frac{p^3 - p^2 + p^2 - p + 3p - 3 + 4}{p-1} = p^2 + p + 3 + \frac{4}{p-1}.$$

Tương tự, $p-1 \in \{1, 2, 4\} \Rightarrow p \in \{2, 3, 5\}$.

* $p = 2 \Rightarrow q = 4 + 2 + 3 + 4 = 13$ (Thỏa mãn 13 là số nguyên tố).

* $p = 3 \Rightarrow q = 9 + 3 + 3 + 2 = 17$ (Thỏa mãn 17 là số nguyên tố).

* $p = 5 \Rightarrow q = 25 + 5 + 3 + 1 = 34$ (Không phải số nguyên tố, loại).

Kết luận: Có 2 cặp số nguyên tố thỏa mãn bài toán là (2; 13) và (3; 17). □

Câu 3. Xét các số nguyên dương m, n với $n > m$. Chứng minh rằng:

$$[m, n] + [m+1, n+1] > 2m\sqrt{n}$$

(Trong đó $[x, y]$ ký hiệu bội chung nhỏ nhất của x và y)

Theo tính chất cơ bản: Tích của hai số bằng tích của ƯCLN và BCNN của chúng.

Ta đặt $d_1 = (m, n)$ và $d_2 = (m+1, n+1)$ là các ước chung lớn nhất.

Khi đó, các Bội chung nhỏ nhất được viết lại thành:

$$[m, n] = \frac{mn}{d_1} \quad \text{và} \quad [m+1, n+1] = \frac{(m+1)(n+1)}{d_2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, vế trái (VT) của bất đẳng thức cần chứng minh là:

$$\text{VT} = \frac{mn}{d_1} + \frac{(m+1)(n+1)}{d_2} \geq 2\sqrt{\frac{mn(m+1)(n+1)}{d_1d_2}} \quad (*)$$

Mẫu chốt của bài toán là tìm mối liên hệ giữa d_1, d_2 và $(n-m)$:

- $d_1 = (m, n) \Rightarrow d_1$ cũng là ước của hiệu $n-m$.
- $d_2 = (m+1, n+1) \Rightarrow d_2$ cũng là ước của hiệu $(n+1) - (m+1) = n-m$.

Mặt khác, ta xét ƯCLN của d_1 và d_2 . Gọi $d = (d_1, d_2)$, ta có:

- $d \mid d_1 \Rightarrow d \mid m$
- $d \mid d_2 \Rightarrow d \mid (m+1)$
- $\Rightarrow d$ phải là ước của hiệu $(m+1) - m = 1$. Suy ra $d = 1$.

Vì d_1 và d_2 là hai ước **nguyên tố cùng nhau** của $(n-m)$, nên tích d_1d_2 cũng phải là một ước của $(n-m)$.

Do đó:

$$d_1d_2 \leq n-m$$

Mà $m \geq 1$ nên $n-m < n$. Suy ra ta có đánh giá: $d_1d_2 < n$.

Quay trở lại biểu thức trong căn ở (*), ta thay $d_1d_2 < n$ vào mẫu số:

$$\frac{mn(m+1)(n+1)}{d_1d_2} > \frac{mn(m+1)(n+1)}{n} = m(m+1)(n+1)$$

Vì $m \geq 1, n > m \geq 1$ nên $m + 1 > m$ và $n + 1 > n$. Do đó:

$$m(m + 1)(n + 1) > m \cdot m \cdot n = m^2 n$$

Thay kết quả này trở lại (*), ta được:

$$VT > 2\sqrt{m^2 n} = 2m\sqrt{n} \quad (\text{đpcm})$$

□

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi $a, b > 0$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} &\geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \iff \frac{(a-b)^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0 \\ &\Rightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta cần chứng minh $2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0$

Thật vậy, ta có

$$a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} = \frac{-(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)}, \quad a+b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

Do vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] &\geq 0 \\ \iff (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] &\geq 0 \iff (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \\ \iff (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} &\geq 0 \iff \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này hiển nhiên đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

□

Câu 5. Xét tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 50\}$. Hỏi có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu phần tử của S để trong các phần tử được chọn ra không tồn tại hai phần tử x, y mà:

- a) $|x - y| = 4$
- b) $|x - y| \in \{4, 7\}$

a) Đầu tiên ta chia các phần tử của S thành 4 nhóm độc lập dựa theo số dư khi chia cho 4:

- Nhóm 1: $\{1, 5, 9, \dots, 49\}$ (có 13 phần tử).
- Nhóm 2: $\{2, 6, 10, \dots, 50\}$ (có 13 phần tử).
- Nhóm 3: $\{3, 7, 11, \dots, 47\}$ (có 12 phần tử).
- Nhóm 4: $\{4, 8, 12, \dots, 48\}$ (có 12 phần tử).

Hai phần tử có hiệu bằng 4 chỉ có thể xuất hiện nếu chúng nằm cùng một nhóm và là hai số liên tiếp trong nhóm đó.

Ta đánh giá số phần tử lớn nhất có thể chọn trong từng nhóm: ◦ **Với nhóm có 13 phần tử (Nhóm 1 và 2):** Ta bắt cặp các số liên tiếp: $(1, 5), (9, 13), (17, 21), (25, 29), (33, 37), (41, 45)$ và số 49 đứng một mình. Trong mỗi cặp ta chỉ được chọn tối đa 1 số, cộng thêm số 49. Vậy chọn nhiều nhất: $6 + 1 = 7$ phần tử.

◦ **Với nhóm có 12 phần tử (Nhóm 3 và 4):** Ta bắt cặp hoàn toàn: $(3, 7), (11, 15), \dots, (43, 47)$. Có tất cả 6 cặp, mỗi cặp chọn tối đa 1 số. Vậy chọn nhiều nhất: 6 phần tử.

Vậy số phần tử nhiều nhất có thể chọn là:

$$|A| = 7 + 7 + 6 + 6 = 26 \text{ phần tử.}$$

Bộ số minh họa: $\{(1, 2, 3, 4), (9, 10, 11, 12), \dots, (41, 42, 43, 44), 49, 50\}$

□

b)

Xét một chuỗi gồm 11 số liên tiếp: $B = \{1, 2, \dots, 11\}$.

Nếu ta xếp 11 số này thành một vòng tròn/chuỗi theo thứ tự bước nhảy cộng 4 (lấy số dư cho 11):

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow (1)$$

Hai số cạnh nhau trong chuỗi này luôn có hiệu là 4 hoặc 7. Bài toán quy về: Không được chọn 2 số đứng cạnh nhau trên chuỗi vòng tròn 11 phần tử.

Số phần tử lớn nhất có thể chọn từ vòng tròn 11 phần tử là: $\lfloor 11/2 \rfloor = 5$ phần tử.

Chia tập S (50 phần tử) thành các cụm 11 số:

Ta chia S thành 4 cụm đầy đủ (mỗi cụm 11 số) và 1 cụm còn thừa 6 số:

- Cụm 1 đến 4 (từ 1 đến 44): Mỗi cụm chọn tối đa 5 số $\Rightarrow 4 \times 5 = 20$ số.
- Cụm 5 (còn lại 6 số): $\{45, 46, 47, 48, 49, 50\}$.

– Xét chuỗi tương ứng của 6 số này: $45 \rightarrow 49 \rightarrow 46 \rightarrow 50 \rightarrow 47 \rightarrow 48$.

– Đây là một chuỗi thẳng 6 phần tử. Số phần tử lớn nhất không kề nhau chọn được là $6 : 2 = 3$ số (ví dụ chọn: $\{45, 46, 47\}$).

Kết luận:

Số phần tử nhiều nhất có thể chọn ở câu b là:

$$|A| = 5 \times 4 + 3 = 23 \text{ phần tử.}$$

Bộ số minh họa: $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 37, 44, 45, 46, 47\}$.

□

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng qua O vuông góc với AO cắt AB, AC lần lượt tại K, L .

1. Chứng minh rằng $EF \parallel KL$.
2. Chứng minh rằng $OK + KH = OL + LH$.

1. Vẽ đường kính AT của (O) . Vì $OA = OT = OB$ nên $\widehat{ABT} = 90^\circ$ hay $AB \perp BT$, tương tự $AC \perp CT$.

Mặt khác, $BH \perp AC$ và $CH \perp AB$ nên $BH \parallel CT$ và $CH \parallel BT$ dẫn đến tứ giác $BHCT$ là hình bình hành. Suy ra HT và BC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

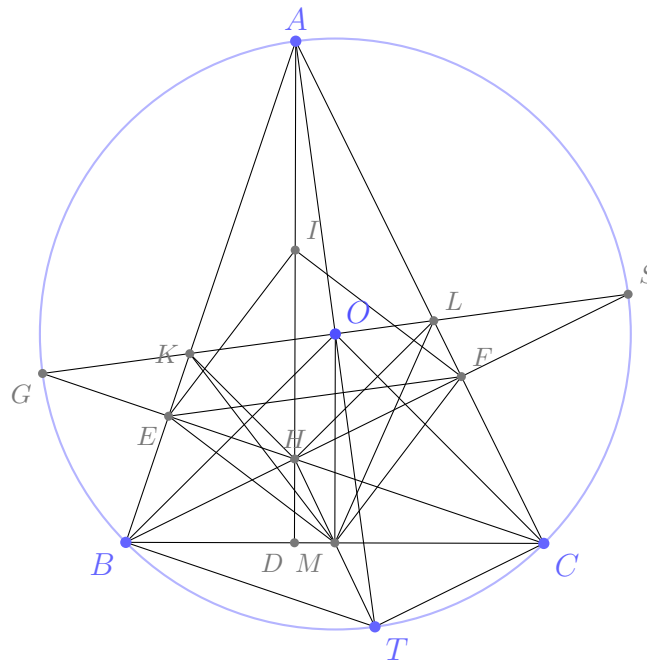
Gọi I là trung điểm AH thì $IE = IF = \frac{1}{2}AH$, $ME = MF = \frac{1}{2}BC$ nên MI là trung trực của EF , suy ra $MI \perp EF$. Dẫn đến $AT \perp EF$, mà $AT \perp KL$ nên $EF \parallel KL$.

2. Gọi CE cắt lại (O) tại điểm G thì G đối xứng với H qua AB (tính chất quen thuộc).

Ta có: $\widehat{ACG} = \widehat{ACE} = 45^\circ$ suy ra $\widehat{AOG} = 2\widehat{ACG} = 90^\circ$. Mà $\widehat{AOK} = 90^\circ$ nên O, K, G thẳng hàng.

Tương tự, gọi BF cắt lại (O) tại S thì O, L, S thẳng hàng.

Ta có: $OK + KH = OK + KG = OG = OS = OL + LS = OL + LH$ (đpcm). □



ĐỀ 12

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn:

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x + y}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Ta có: $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x + y} \Leftrightarrow (x - 2y)(2x + y) = 3xy \Leftrightarrow 2x^2 - 6xy - 2y^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ hoặc } \frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Với $\frac{x}{y} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3 + \sqrt{13}} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. Ta được $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = 11$.

Với $\frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{3 - \sqrt{13}} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$. Ta được $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 = 11$.

Vậy $P = 11$ □

Câu 2.

1. Cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2; 2), B(4; 8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m thỏa mãn $-2 < m < 4$. Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \\ \sqrt{2x + 3} + \sqrt{2y} + 2x^2 + x = 26 \end{cases}$$

1. Có $M\left(m; \frac{m^2}{2}\right)$

Gọi $A'(-2; 0), M'(m; 0), B'(4; 0)$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B}{2} = 30$$

$$S_{AMM'A'} = \frac{(AA' + MM')A'M'}{2} = \frac{(4 + m^2)(2 + m)}{4}$$

$$S_{MBB'M'} = \frac{(MM' + BB')M'B'}{2} = \frac{(16 + m^2)(4 - m)}{4}$$

$$S_{ABM} = S_{ABA'B'} - S_{AMM'A'} - S_{MBB'M'} = 30 - \frac{6m^2 - 12m + 72}{4} = \frac{27}{2} - \frac{3(m - 1)^2}{2}$$

$$S_{ABM} \leq \frac{27}{2} \forall m$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm. □

2. Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+2)^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = y+3 \\ x+2 = -y-3 \end{cases}$$

$$+) x+2 = -y-3 \Leftrightarrow (x+5) + y = 0 \text{ vô nghiệm vì } (x+5) + y > 0, \forall x \geq -\frac{3}{2}, y \geq 0.$$

$$+) x+2 = y+3 \Leftrightarrow y = x-1 \text{ thay vào (2) ta được: } \sqrt{2x+3} + \sqrt{2(x-1)} + 2x^2 + x = 26$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}-3) + (\sqrt{2x-2}-2) + 2x^2 + x - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2x-2-4}{\sqrt{2x-2}+2} + (x-3)(2x+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} + 2x+7 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3, \text{ do } \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} + 2x+7 > 0, \forall x \geq 1$$

$$\text{Do } x=3 \Rightarrow y=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$

□

Câu 3.

1. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 7^y = 1$.

2. Cho các số nguyên dương a, b, c đôi một phân biệt thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

3. Viết lên bảng bốn số $1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}$. Ở mỗi lần thực hiện, ta xóa đi 4 số a, b, c, d hiện có trên bảng và viết vào 4 số mới lần lượt là:

$$a + \frac{1}{bcd}, \quad b + \frac{1}{cda}, \quad c + \frac{1}{dab}, \quad d + \frac{1}{abc}$$

Hỏi có thể thực hiện thao tác này cho đến khi trên bảng gồm 4 số hữu tỉ hay không? Vì sao?

1. Ta có:

$$5 \cdot 3^x - 2 \cdot 7^y = 1 \text{ suy ra: } 5(3^x - 1) = 2(7^y - 2)$$

Ta thấy rõ ràng với y là số nguyên dương thì $7^y - 2$ là một số tự nhiên lẻ ≥ 5 .

Mà bên vế trái nhân tử lẻ chỉ có thể có hai số tự nhiên lẻ là 1 hoặc 5 (vì rõ ràng với mọi x nguyên dương thì $3^x - 1$ là một số tự nhiên chẵn và 5 là một số nguyên tố).

$$\text{Do đó ta chỉ có trường hợp } \begin{cases} 7^y - 2 = 5 \\ 3^x - 1 = 2 \end{cases} \text{ suy ra: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị $(x; y)$ cần tìm là $(1; 1)$.

□

2. Với các số a, b, c thỏa mãn yêu cầu, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2} \Leftrightarrow a(c^2 + b^2) = c(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0.$$

Do $a \neq c$ nên ta được $b^2 - ac = 0$, hay là $b^2 = ac$ và như vậy thì:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= a^2 + ac + c^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 - ac \\ &= (a + c)^2 - b^2 \\ &= (a - b + c)(a + b + c). \end{aligned}$$

Ta giả sử rằng $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố. Theo đó, do $0 < a - b + c < a + b + c$, ta cần phải có $a - b + c = 1$, nên:

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4a - 4b - 4c &= 0 \\ \Leftrightarrow (4a^2 - 4a + 1) + (4b^2 - 4b + 1) + (4c^2 - 4c + 1) &= 3 \\ \Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (2b - 1)^2 + (2c - 1)^2 &= 3. \end{aligned}$$

Do a, b, c là các số nguyên dương, ta suy ra $2a - 1 = 2b - 1 = 2c - 1 = 1$, nên là $a = c = 1$, trái giả thiết $a \neq c$. Các mâu thuẫn chỉ ra chứng tỏ giả sử là sai. Bài toán được chứng minh.

□

3. Giả sử 4 số trên bảng tại một bước bất kỳ là a, b, c, d . (Để thấy các số này luôn dương vì số ban đầu dương và phép toán chỉ có phép cộng).

Sau một lần biến đổi, số a và b sẽ trở thành a' và b' :

$$\begin{aligned} a' &= a + \frac{1}{bcd} = \frac{abcd + 1}{bcd} \\ b' &= b + \frac{1}{cda} = \frac{abcd + 1}{acd} \end{aligned}$$

Bây giờ, ta xét tỉ số giữa hai số mới này:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\frac{abcd+1}{bcd}}{\frac{abcd+1}{acd}} = \frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$$

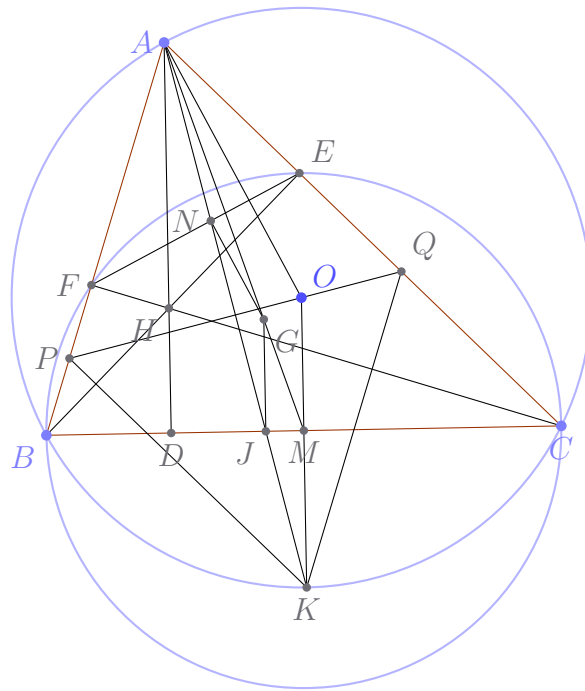
Suy ra: Tỉ số của hai số tương ứng trên bảng sau mỗi bước là **luôn không đổi** (Bất biến).

- Ở trạng thái ban đầu, ta có hai số là 1 và $\sqrt{2}$. Tỉ số của hai số này là $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ (đây là một số vô tỉ).
- Giả sử đến một lúc nào đó, trên bảng xuất hiện 4 số đều là số hữu tỉ. Khi đó, tỉ số của bất kỳ cặp số nào trên bảng cũng bắt buộc phải là một **số hữu tỉ** (vì phép chia hai số hữu tỉ khác 0 luôn tạo ra một số hữu tỉ).
- Tuy nhiên, do tính chất bất biến ở Bước 1, tỉ số của hai số ở vị trí đầu tiên luôn phải bằng $\sqrt{2}$ (vô tỉ).

Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Vậy ta **không thể** thực hiện thao tác cho đến khi trên bảng gồm 4 số hữu tỉ. □

Câu 4. Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua tâm. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Đường thẳng qua O vuông góc với phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt AB, AC lần lượt tại P và Q . Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại J và K (K khác A).

1. Chứng minh tứ giác $APKQ$ là hình thoi.
2. Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của đường thẳng AK với EF . Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua N vuông góc với EF và đường thẳng qua J vuông góc với BC . Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.
3. Giả sử bán kính đường tròn (O) có độ dài bằng R . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $DE + DF + EF$.



1. Vì tam giác APQ cân tại A , AK là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên AK cũng là trung trực của PQ . Điều này chứng tỏ $OP \perp AK$ suy ra OP là trung trực của AK dẫn đến $AP = PK$, tương tự $AQ = QK$ nên $AP = AQ = KP = KQ$ suy ra $APKQ$ là hình thoi.

2. Ta có: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) có AN, AJ là các phân giác tương ứng nên

$$\frac{AN}{AJ} = \frac{AF}{AC} = \frac{AH}{AS} = \frac{2OM}{2OK} = \frac{OM}{OK}$$

suy ra $1 - \frac{AN}{AJ} = 1 - \frac{OM}{OK}$ hay $\frac{NJ}{AJ} = \frac{MK}{OK}$ suy ra $NJ \cdot OK = AJ \cdot MK$ (1). Ta có các tính chất quen thuộc: $OA \perp EF, \widehat{BAD} = \widehat{CAO}, AH = 2OM$.

Ta có: $GN \parallel OA, GJ \parallel OK$ nên các tam giác NGJ, OAK cân đồng dạng nên $\frac{NJ}{AK} = \frac{GJ}{OK}$ dẫn đến $NJ \cdot OK = AK \cdot GJ$ (2).

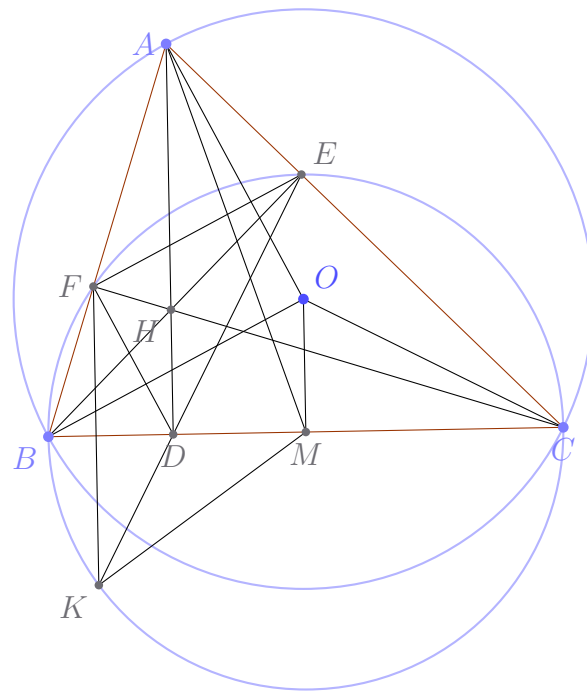
Từ (1), (2) suy ra $AK \cdot GJ = AJ \cdot MK \Leftrightarrow \frac{AJ}{AK} = \frac{GJ}{MK}$ hay A, G, M thẳng hàng.

3.

Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle AFC$ (g.g)

dẫn đến $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) suy ra $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A$.

Mà B, C cố định nên BC không đổi và $\frac{BC}{\sin \angle BOC}$ không đổi, dẫn đến $\widehat{BAC}$ không đổi suy ra $EF = BC \cdot \cos A$ (không đổi).



Chứng minh tương tự ta cũng có: $\triangle DBF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) và $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ (c.g.c) nên $\widehat{BDF} = \widehat{BAC} = \widehat{EDC}$.

Gọi M là trung điểm của BC , do $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ nên $ME = MF = MB = MC = \frac{1}{2}BC$ điều này chứng tỏ 4 điểm B, F, E, C nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC .

Gọi K là điểm đối xứng với F qua BC thì $DF = DK$ và $MF = MK$ nên K nằm trên đường tròn tâm M đường kính BC . Ngoài ra ta cũng có: $\widehat{KDB} = \widehat{FDB} = \widehat{EDC}$ suy ra K, D, E thẳng hàng.

Ta có $DE + DF = DE + DK = EK$, EK là một dây của đường tròn tâm M đường kính BC nên $EK \leq BC$ dẫn đến $DE + DF + EF \leq BC + BC \cdot \cos A = (1 + \cos A) \cdot BC$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi KE là đường kính của đường tròn tâm M đường kính BC , hay K, M, E thẳng hàng, khi đó $D \equiv M$ có nghĩa là tam giác ABC cân tại A .

Vậy GTLN của $DE + DF + EF = (1 + \cos A) \cdot BC$ khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại A , hay A là điểm chính giữa cung lớn BC của (O) . $\square$

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4 - a^3 + ab + 2}} + \frac{1}{\sqrt{b^4 - b^3 + bc + 2}} + \frac{1}{\sqrt{c^4 - c^3 + ca + 2}} \leq \sqrt{3}$$

Ta có $(a - 1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^4 - a^3 + ab + 2 \geq ab + a + 1$

Khi đó ta có: $\frac{1}{\sqrt{a^4 - a^3 + ab + 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab + a + 1}}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{\sqrt{a^4 - a^3 + ab + 2}} &\leq \sum \frac{1}{\sqrt{ab + a + 1}} \\ &\leq \sqrt{3 \left(\sum \frac{1}{ab + a + 1} \right)} \quad (\text{Bất đẳng thức Cauchy schwarz}) \end{aligned}$$

Một kết quả quen thuộc với $abc = 1$ là:

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{ab+a+1} &= \frac{c}{abc+ac+c} + \frac{abc}{bc+b+abc} + \frac{1}{ca+c+1} \\ &= \frac{c}{ac+c+1} + \frac{ac}{c+1+ac} + \frac{1}{ac+c+1} = 1\end{aligned}$$

Do đó $VT \leq \sqrt{3}$

Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 1$

□

Tôi biết chắc chắn các bạn sẽ thắc mắc tại sao có dòng đầu tiên của lời giải này, thì sau đây là cách nháp để có nó. Chúng ta gọi kĩ thuật này là $U.C.T$ hay còn gọi là phương pháp tiếp tuyến (bạn đọc có thể tự tìm tài liệu về phương pháp này trên mạng)

Giả sử: Cần tìm m, n sao cho $a^4 - a^3 \geq ma + n$ (1)

Dấu = xảy ra tại $a = 1$. Thay $a = 1$ vào (1) ta được phương trình:
 $1^4 - 1^3 = m(1) + n \Rightarrow 0 = m + n \Rightarrow n = -m$.

Bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned}a^4 - a^3 &\geq ma - m \\ \Leftrightarrow a^4 - a^3 - m(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3(a - 1) - m(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - m) &\geq 0\end{aligned}$$

Để một biểu thức dạng $(a - 1) \cdot A \geq 0$ luôn đúng với a lân cận 1, thì bản thân A cũng phải chứa nhân tử $(a - 1)$ để tạo ra bình phương $(a - 1)^2 \geq 0$.

Do đó, đa thức $a^3 - m$ phải có nghiệm $a = 1$.

Thay $a = 1$ vào $a^3 - m = 0 \Rightarrow 1^3 - m = 0 \Rightarrow m = 1$.

Suy ra $m = 1$, suy ra $n = -1$.

Ta có đánh giá: $a^4 - a^3 \geq a - 1$

(Phân tích nhân tử lại để kiểm tra: $a^4 - a^3 - a + 1 = (a - 1)(a^3 - 1) = (a - 1)^2(a^2 + a + 1) \geq 0$ là luôn đúng).

Cộng thêm cụm $ab + 2$ vào cả 2 vế:

$$a^4 - a^3 + ab + 2 \geq a - 1 + ab + 2 = ab + a + 1$$

Đây chính là dòng đầu tiên trong lời giải mà bạn thấy.

ĐỀ 13

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = -2$.
 Chứng minh rằng: $\frac{1}{x^{2025}} + \frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{z^{2025}} = \frac{1}{(x+y+z)^{2025}}$.

2. Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x + 2$ thì được dư là -15 , khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - 3$ thì được dư là 20. Tính giá trị của biểu thức $A = (a^{2025} + b^{2025})(b^{2025} + c^{2025})(c^{2025} + a^{2025})$.

1. Từ giả thiết, ta thực hiện quy đồng:

$$\frac{x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2}{xyz} = -2$$

$$\Leftrightarrow x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz = 0$$

Ta có thể phân tích vế trái thành nhân tử như sau:

$$(x^2y + xy^2 + xyz) + (yz^2 + zx^2 + xyz) + y^2z + z^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y+z) + zx(x+y+z) + yz(y+z) = 0$$

Sắp xếp lại ta được kết quả tương đương:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 0$$

Suy ra trong ba số x, y, z có ít nhất hai số đối nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$.

Thay vào hai vế của biểu thức cần chứng minh:

• Vế trái (VT): $\frac{1}{x^{2025}} + \frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{z^{2025}} = \frac{1}{(-y)^{2025}} + \frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{z^{2025}} = -\frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{y^{2025}} + \frac{1}{z^{2025}} = \frac{1}{z^{2025}}$.

• Vế phải (VP): $\frac{1}{(x+y+z)^{2025}} = \frac{1}{(0+z)^{2025}} = \frac{1}{z^{2025}}$.

Vậy ta có đpcm.

□

2. Theo định lý Bezout về số dư trong phép chia đa thức, ta có:

- Số dư khi chia $f(x)$ cho $x + 2$ là $f(-2) = -15$.
- Số dư khi chia $f(x)$ cho $x - 3$ là $f(3) = 20$.

Thay giá trị x vào đa thức $f(x)$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c = -15 \\ 3^3 + a(3)^2 + b(3) + c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4a - 2b + c = -15 \\ 27 + 9a + 3b + c = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = -7 \\ 9a + 3b + c = -7 \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên, ta thấy:

$$4a - 2b + c = 9a + 3b + c \Rightarrow 4a - 2b = 9a + 3b$$

$$\Leftrightarrow 5a + 5b = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

Khi đó: $a^{2025} + b^{2025} = (-b)^{2025} + b^{2025} = -b^{2025} + b^{2025} = 0$.

Thay giá trị này vào biểu thức A:

$$A = (0) \cdot (b^{2025} + c^{2025}) \cdot (c^{2025} + a^{2025}) = 0.$$

Vậy $A = 0$. □

Câu 2.

1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{3x-2} = 2x$$

2. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h. Sau khi xe máy xuất phát được một thời gian thì một xe ô tô cũng xuất phát từ A với vận tốc 60 km/h và nếu không có gì thay đổi thì xe ô tô sẽ đuổi kịp xe máy tại B. Sau khi xe ô tô đi được nửa quãng đường AB thì nó tăng vận tốc mỗi giờ thêm 15 km nên đã đến B sớm hơn xe máy 6 phút. Tính quãng đường AB.

1. Cách 1.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x - \sqrt{2x-1}) + (x - \sqrt[3]{3x-2}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)^2}{x + \sqrt{2x-1}} + \frac{(x+2)(x-1)^2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 \left[\frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} + \frac{x+2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} + \frac{x+2}{x^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} > 0; \forall x \geq \frac{1}{2}$$

Nên phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1) + \frac{1}{3}(3x-2-3\sqrt[3]{3x-2}+2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[3]{3x-2}+2)(\sqrt[3]{3x-2}-1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1 \\ \sqrt[3]{3x-2} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

□

2. Gọi quãng đường AB là S (km). Theo kế hoạch, ô tô và xe máy dự kiến đến B cùng lúc. Thời gian ô tô dự kiến đi là $S/60$ giờ. Tuy nhiên ô tô đã tăng vận tốc lên $60 + 15 = 75$ (km/h) khi đi được nửa quãng đường nên thời gian ô tô đi thực tế là $\frac{S/2}{60} + \frac{S/2}{75} = \frac{S}{120} + \frac{S}{150}$ (giờ). So với kế hoạch của mình, ô tô đã tiết kiệm được một khoảng thời gian là:

$$t = \frac{S}{60} - \left(\frac{S}{120} + \frac{S}{150} \right) = \frac{S}{120} - \frac{S}{150} = \frac{S}{600} \text{ (giờ)}.$$

Vì ban đầu hai xe dự kiến đến cùng lúc, nên khoảng thời gian ô tô tiết kiệm được chính là khoảng thời gian ô tô đến sớm hơn xe máy, tức là 6 phút $\left(\frac{1}{10} \text{ giờ} \right)$.

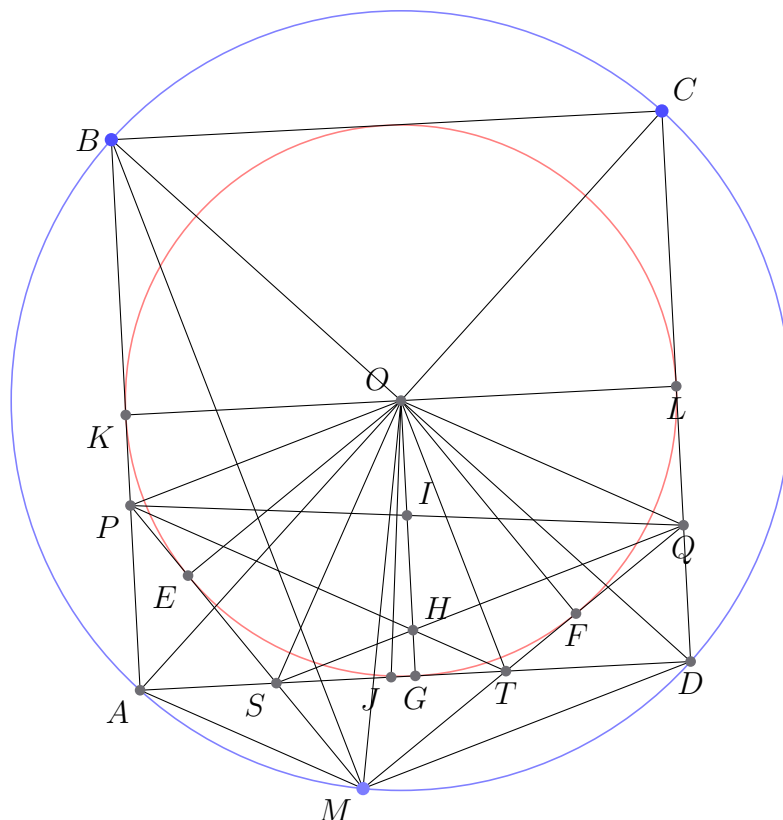
Ta có phương trình: $\frac{S}{600} = \frac{1}{10} \Rightarrow S = 60$.

Vậy quãng đường AB dài 60 km. □

Câu 3.

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , M là điểm nằm trên cung nhỏ AB của (O) , kí hiệu c_1 là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Các tiếp tuyến qua M của c_1 cắt AB, CD lần lượt tại P, Q . Gọi E, F là các tiếp điểm của MP, MQ với c_1 , các đường thẳng MP, MQ cắt AD lần lượt tại S, T ; H là giao điểm của PT, QS .

1. (a) Chứng minh $OEMF$ là hình vuông và OH vuông góc với AD .
(b) Chứng minh đường thẳng qua O vuông góc với PQ chia đôi đoạn thẳng ST .
2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 4xy + 7y^2 + 6x - 12y + 8 = 0$.



1.

- a) Vì $ABCD$ là hình vuông nên O là giao 2 đường chéo AC, BD ; ngoài ra khoảng cách từ O đến các cạnh hình vuông bằng nhau nên O cũng là tâm đường tròn nội tiếp hình vuông.

Gọi K, L, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, DA thì K, L, G chính là các tiếp điểm của (O) với AB, CD, DA .

Do $OM = OA = \sqrt{2}OK = \sqrt{2}OE$ nên tam giác MEO vuông cân tại E dẫn đến $OE = EM$ từ đó suy ra $OE = OF = ME = MF$. Tứ giác $OEMF$ là hình thoi có $\widehat{OEM} = 90^\circ$ nên $OEMF$ là hình vuông.

Do $\widehat{KOG} = \widehat{EOF} = 90^\circ$ nên $\widehat{KOE} = \widehat{GOF}$ suy ra $\widehat{POE} = \widehat{TOG}$ dẫn đến $\triangle OEP = \triangle OGT$ (cgv-gn) suy ra $OP = OT$ và $PE = GT$ dẫn đến $SP = ST$ suy ra OS là trung trực của PT , tương tự OT là trung trực của SQ nên các đường thẳng SQ, TP chứa các đường cao của tam giác OST suy ra H là trực tâm của tam giác OST dẫn đến $OH \perp ST$ hay $OH \perp AD$.

- b) Ta có: $\widehat{POT} = \widehat{EOF} = 90^\circ$ hay $OP \perp OT$ suy ra $OP \parallel SQ$, tương tự $OQ \parallel PT$ dẫn đến $OPHQ$ là hình bình hành nên OH cắt PQ tại trung điểm I của mỗi đường.

Gọi J là trung điểm của ST , ta chứng minh: $OJ \perp PQ$.

Ta có: $\widehat{POH} = \widehat{QHT}$ (đồng vị) mà $\widehat{QHT} = \widehat{SOT}$ (cùng phụ với $\widehat{OTP}$) nên $\widehat{POH} = \widehat{SOT}$, $\widehat{OHP} = \widehat{OST}$ (cùng phụ với $\widehat{SOH}$) nên $\triangle OPH \sim \triangle TOS$ (g.g).

PI, OJ là các trung tuyến tương ứng của 2 tam giác nên $\triangle OIP \sim \triangle TJO$ (c.g.c) dẫn đến $\widehat{OPI} = \widehat{JOT}$ do đó $\widehat{OPI} + \widehat{POJ} = \widehat{JOT} + \widehat{POJ} = \widehat{POT} = 90^\circ$ hay $OJ \perp PQ$. $\square$

$$2. x^2 - 4xy + 7y^2 + 6x - 12y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + 6(x - 2y) + 3y^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y + 3)^2 + 3y^2 = 1$$

Suy ra $0 \leq 3y^2 \leq 1$ mà y là số nguyên nên chỉ xảy ra trường hợp $y = 0$.

Thay vào ta được $(x + 3)^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-2; -4\}$.

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(-2; 0), (-4; 0)$. $\square$

Câu 4.

- Quả bóng đá theo tiêu chuẩn FIFA (Liên đoàn bóng đá thế giới) có dạng hình cầu với bán kính bằng 11 cm. Tính diện tích bề mặt của quả bóng đó (lấy $\pi = 3,14$).
- Cho 2 số hữu tỉ a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$. Chứng minh rằng $\sqrt{a} - 1$ là bình phương của 1 số hữu tỉ.

1. Quả bóng có bán kính $R = 11$ cm.

Diện tích bề mặt của quả bóng hình cầu được tính theo công thức $S = 4\pi R^2$.

Thay số vào ta có:

$$S = 4 \cdot 3,14 \cdot 11^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 121 = 1519,76 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích bề mặt của quả bóng là $1519,76 \text{ cm}^2$. $\square$

2. Ta viết lại giả thiết bài toán thành

$$\begin{aligned} a^3 + 4a^2b + 4ab^2 &= 4a^2 + 4ab^2 + b^4 \Leftrightarrow a(a+2b)^2 = (2a+b^2)^2 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{(2a+b^2)^2}{(a+2b)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{2a+b^2}{a+2b} \end{aligned}$$

Do đó ta có $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. Mặt khác ta lại có

$$\sqrt{a} - 1 = \frac{2a+b^2}{a+2b} - 1 = \frac{a-2b+b^2}{a+2b} = \frac{(a-2b+b^2)(a+2b)}{(a+2b)^2} \quad (*)$$

Vì vậy ta cần chỉ ra $(a-2b+b^2)(a+2b)$ là bình phương của một số hữu tỉ, hay $(a-2b+b^2)(a+2b)a$ là bình phương một số hữu tỉ. Thật vậy ta có

$$(a-2b+b^2)(a+2b)a = a^2b^2 + a^3 + 2b^3a - 4ab^2.$$

Thay $a^3 = 4a^2 + b^4 - 4a^2b$ vào ta có

$$(a-2b+b^2)(a+2b)a = a^2b^2 + 4a^2 + b^4 - 4a^2b + 2b^3a - 4ab^2 = (ab+b^2-2a)^2.$$

Mà ta thấy a là bình phương 1 số hữu tỉ nên $(a-2b+b^2)(a+2b)$ cũng là bình phương một số hữu tỉ. Từ (*) ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Câu 5.

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$2 + \frac{1}{3}(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq abc(a+b+c)$$

2. Cho 80 chi tiết được đánh số thứ tự từ 1 đến 80. Người ta lấy ra 50 chi tiết bất kì trong số chúng. Chứng minh rằng trong 30 chi tiết còn lại, luôn tồn tại 2 chi tiết có số thứ tự cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị.

1. Áp dụng BĐT AM - GM ta có $a^4b^2 + b^4c^2 \geq 2a^2b^3c$, $b^4c^2 + c^4a^2 \geq 2b^2c^3a$, $c^4a^2 + a^4b^2 \geq 2c^2a^3b$. Cộng lại ta được $a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geq a^2b^3c + b^2c^3a + c^2a^3b$.

Vì vậy ta cần chứng minh

$$6 + a^2b^3c + b^2c^3a + c^2a^3b \geq 3abc(a+b+c)$$

Đặt $ab = x$, $bc = y$, $ca = z$ ($x, y, z > 0$). Khi đó $x + y + z = 3$ và BĐT trên trở thành

$$6 + x^2y + y^2z + z^2x \geq 3(xy + yz + zx)$$

Ta có $3(x^2y + y^2z + z^2x) = (x+y+z)(x^2y + y^2z + z^2x) \geq (xy + yz + zx)^2$.

Ta quy về chứng minh

$$18 + (xy + yz + zx)^2 \geq 9(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx - 3)(xy + yz + zx - 6) \geq 0.$$

Lại có $xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = 3$ nên BĐT trên đúng. Vậy ta có đpcm. $\square$

2. (C1) Chia 30 chi tiết còn lại thành 3 tập ứng với số dư khi chia cho 3 là 0, 1, 2. Vì $30 > 3 \cdot 9 \implies$ có 1 tập chứa ít nhất 10 phần tử.

Gọi $\{x, x + 3k_1, \dots, x + 3k_9\}$ trong đó $k_1 < k_2 < \dots < k_9$.

Giả sử rằng không có số nào cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị $\implies 3k_i - 3k_{i-1} \neq 3, 3k_i - 3k_{i-1} \neq 6 \implies k_i - k_{i-1} \neq 1, 2 \implies k_i - k_{i-1} \geq 3 \implies x + 3k_i \geq x + 3k_{i-1} + 9$. Khi đó:

$$80 \geq x + 3k_9 \geq x + 3k_8 + 9 \geq \dots \geq x + 3k_1 + 72 \geq 82.$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng sai, ta có đpcm. $\square$

(C2) Chia 80 chi tiết thành 3 tập ứng với các số dư khi chia cho 3 là 0, 1, 2.

- $X_1 = \{1, 4, 7, \dots, 79\} \rightarrow |X_1| = 27$
- $X_2 = \{2, 5, 8, \dots, 80\} \rightarrow |X_2| = 27$
- $X_3 = \{3, 6, 9, \dots, 78\} \rightarrow |X_3| = 26$

Ý tưởng: cần tìm một bộ $\{x, x + 3, x + 6\}$ sau khi loại 50 số trước đó.

Phân hoạch X_1, X_2, X_3 như sau:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 4, 7\} \cup \{10, 13, 16\} \cup \dots \cup \{73, 76, 79\} \\ X_2 &= \{2, 5, 8\} \cup \{11, 14, 17\} \cup \dots \cup \{74, 77, 80\} \\ X_3 &= \{3, 6, 9\} \cup \{12, 15, 18\} \cup \dots \cup \{66, 69, 72\} \cup \{75, 78\}. \end{aligned}$$

Khi này có tất cả 28 tập con nhỏ hơn được tạo ra, lại có tất cả 30 chi tiết còn lại nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một tập chứa ít nhất 2 phần tử. Ta xét các TH sau:

TH1: Nếu có 2 chi tiết thuộc $\{75, 78\} \implies$ có 28 chi tiết còn lại thuộc 27 tập còn lại $\implies$ tồn tại 1 tập chứa ít nhất 2 phần tử $\implies$ đpcm.

TH2: Nếu có 0 hoặc 1 chi tiết thuộc $\{75, 78\}$, lập luận như TH1 ta có đpcm.

Vậy trong mọi TH, ta luôn có 2 chi tiết có STT cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị trong 30 chi tiết còn lại. $\square$

ĐỀ 14

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x - \sqrt{x - 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

2. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \left(\frac{a+b}{c} - 1\right) \left(\frac{b+c}{a} - 1\right) \left(\frac{c+a}{b} - 1\right)$$

1. Điều kiện $\begin{cases} x - \sqrt{x - 3} \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 - 4x\sqrt{x - 3}} &= \sqrt{3}(\sqrt{x} + 2) \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x - 3} &= 3x + 12\sqrt{x} + 12 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x - 3} + x - 3 &= 4x + 12\sqrt{x} + 9 \\ \Leftrightarrow (2x - \sqrt{x - 3})^2 &= (2\sqrt{x} + 3)^2 \end{aligned}$$

Trường hợp 1. Với $2x - \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x} + 3$

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{x - 3} &= 2\sqrt{x} + 3 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x - 3} - 1 - 2(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4) \left[\frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 1} - 2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

Với $x \geq 3$ Phần trong ngoặc vuông luôn nhỏ hơn 0. Vậy khi đó phương trình có nghiệm $x = 4$

Trường hợp 2. Với $2x - \sqrt{x - 3} = -2\sqrt{x} - 3$

Ta nhận thấy với $x \geq 3$ thì $VT > 0$ còn $VP < 0$. Do đó phương trình này vô nghiệm

Kết luận. phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

2. Từ giả thiết $a, b, c \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} &= 3 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b + c) \left[\frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = b = c \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $P = \left(\frac{a+b-c}{c}\right) \left(\frac{b+c-a}{a}\right) \left(\frac{c+a-b}{b}\right)$. Xét hai trường hợp:

• **Trường hợp 1:** $a + b + c = 0$

Suy ra $a + b = -c$; $b + c = -a$; $c + a = -b$.

Thay vào P :

$$P = \frac{-2c}{c} \cdot \frac{-2a}{a} \cdot \frac{-2b}{b} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

• **Trường hợp 2:** $a = b = c$

Thay vào P :

$$P = \left(\frac{2a-a}{a}\right) \left(\frac{2a-a}{a}\right) \left(\frac{2a-a}{a}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Kết luận: $P = -8$ hoặc $P = 1$. □

Câu 2.

1. Cho $P(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên, bậc dương. Biết $P(x)$ có một nghiệm là $x_1 = 3 - \sqrt{2}$. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 - 6x + 7$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{z + x^2} + \frac{y^3}{x + y^2} + \frac{z^3}{y + z^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

1. Ta có:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 - 3 = -\sqrt{2} \\ &\Rightarrow (x_1 - 3)^2 = 2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + 9 = 2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + 7 = 0 \end{aligned}$$

Vậy x_1 là một nghiệm của đa thức $Q(x) = x^2 - 6x + 7$.

Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$. Vì $P(x)$ và $Q(x)$ đều có hệ số nguyên, và hệ số bậc cao nhất của $Q(x)$ là 1, nên đa thức thương $H(x)$ và đa thức dư có dạng $ax + b$ đều phải có hệ số nguyên ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Ta có hằng đẳng thức:

$$P(x) = (x^2 - 6x + 7) \cdot H(x) + ax + b$$

Thay $x = x_1 = 3 - \sqrt{2}$ vào đẳng thức trên, do $P(x_1) = 0$ (giả thiết) và $x_1^2 - 6x_1 + 7 = 0$ (chứng minh trên):

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot H(x_1) + a(3 - \sqrt{2}) + b \\ &\Leftrightarrow 3a + b - a\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $3a + b \in \mathbb{Z}$. Do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, đẳng thức trên chỉ xảy ra khi và chỉ khi phần hữu tỉ và phần vô tỉ đều bằng 0:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

Suy ra đa thức dư $ax + b = 0$.

Kết luận: Đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$. □

2. Ta có: $xy + yz + zx = 3xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, ta được $a + b + c = 3$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x^3}{z + x^2} &= \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a^2}} = \frac{c}{a(a^2 + c)} \\ &= \frac{c + a^2 - a^2}{a(a^2 + c)} = \frac{1}{a} - \frac{a}{a^2 + c} \geq \frac{1}{a} - \frac{a}{2a\sqrt{c}} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Ta có $\left(\frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4c} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2\sqrt{c}}$

Do đó $\frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4c} - \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow VT &\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{4a} - \frac{1}{4b} - \frac{1}{4c} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4a} + \frac{3}{4b} + \frac{3}{4c} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$ □

Câu 3.

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn:

$$16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$$

2. Với mỗi số thực x , kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

a) Chứng minh rằng $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 = [x + 1]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 840$ thỏa mãn $[\sqrt{n}]$ là ước của n .

1. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn. Ta có

$$15xy + 371 = 16(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Do vế trái dương nên $x - y > 0$ hay $x - y \geq 1$. Suy ra

$$15xy + 371 \geq 16(x^2 + xy + y^2) = xy + 15xy + 16(x^2 + y^2) \geq 1 + 15xy + 16(x^2 + y^2).$$

Chuyển về, ta được $16(x^2 + y^2) \leq 370$ hay $x^2 + y^2 \leq 23$.

Ngoài ra, lấy đồng dư modulo 2 hai vế phương trình đã cho, ta được

$$xy + 1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ta có x, y cùng lẻ từ đây. Do $x > y \geq 1$ và $x^2 < 23$ nên chỉ có thể $x = 3$. Thế trở lại, ta có $y = 1$.

Cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu là $(x, y) = (3, 1)$. $\square$

2. a) Ta có $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x nên $x < [x] + 1$ suy ra $x - 1 < [x]$.
Mà ta dễ thấy rằng

$$\begin{cases} [x] + 1 \leq [x + 1] \\ [x + 1] - 1 \leq [x] \end{cases} \Rightarrow [x] + 1 = [x + 1].$$

Vậy $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1 = [x + 1]$. Bài toán được chứng minh.

b) Đặt $k = [\sqrt{n}]$ thì $1 \leq k \leq 28$ và $k^2 \leq n < (k + 1)^2$ hay $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$.

Suy ra $n = k^2 + r$ với $0 \leq r \leq 2k$. Mặt khác $k \mid n = (k^2 + r)$ nên $r \in \{0; k; 2k\}$ với $1 \leq k \leq 28$.

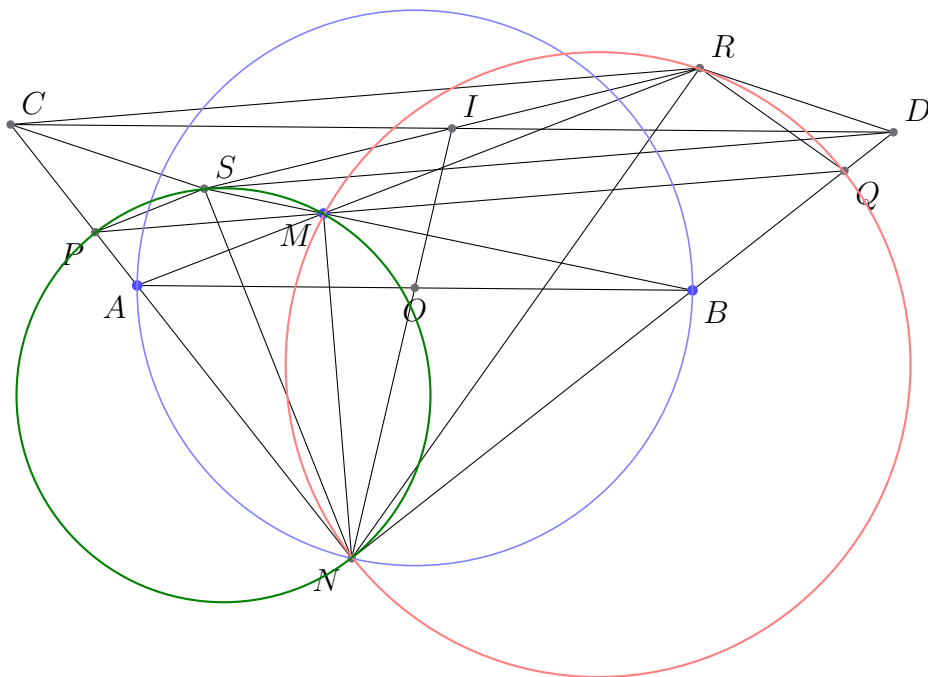
Mà $840 = 28^2 + 2 \cdot 28$ và các số n có dạng $k^2; k^2 + k; k^2 + 2k$ đều thỏa mãn bài toán.

Do đó, số các số nguyên dương n thỏa mãn bài toán là $3 \cdot 28 = 84$. $\square$

Câu 4.

Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm M nằm trong (O) ($M \neq A, B$), phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt (O) tại N , phân giác ngoài của $\widehat{AMB}$ cắt NA, NB lần lượt tại P, Q . Đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính PN tại S , đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R , đường thẳng qua R song song với PQ cắt NA tại C , đường thẳng qua S song song với PQ cắt NB tại D .

1. Chứng minh: $\widehat{BNS} = \widehat{CNR}$.
2. Chứng minh: $AB \parallel CD$.
3. Gọi I là giao điểm của DC, RS . Chứng minh: N, O, I thẳng hàng.



1. Vì N nằm trên đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ANB} = 90^\circ$, suy ra NB là tiếp tuyến của đường tròn c_1 đường kính PN , tương tự NA là tiếp tuyến của đường tròn c_2 đường kính QN . Từ đó ta có: $\triangle BMN \sim \triangle BNS$ (g.g) dẫn đến $\widehat{BNS} = \widehat{BMN}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \widehat{CNR} &= \widehat{CNM} + \widehat{MNR} \\ &= \widehat{MQN} + \widehat{MQR} = \widehat{RQN} = \widehat{AMN} \text{ mà } \widehat{BMN} = \widehat{AMN} \text{ nên } \widehat{BNS} = \widehat{CNR}. \end{aligned}$$

2. Xét tam giác BNS, RNC ta có: $\widehat{BNS} = \widehat{CNR}$ (chứng minh trên), $\widehat{RCN} = \widehat{MPN} = \widehat{MSN} = \widehat{NSB}$ nên $\triangle BMN \sim \triangle BNS \sim \triangle RNC$ (g.g). Tương tự ta cũng có: $\triangle DSN \sim \triangle RAN \sim \triangle NAM$ (g.g) dẫn đến

$$\frac{NB}{NR} = \frac{NS}{NC} \text{ và } \frac{NS}{NA} = \frac{ND}{NR} \text{ suy ra } NB \cdot NC = NA \cdot ND \text{ hay } \frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND}$$

điều này chứng tỏ $AB \parallel CD$.

3. Do $\triangle BMN \sim \triangle RNC$ (g.g) nên $\frac{MN}{NC} = \frac{BN}{RC} \Rightarrow RC = \frac{NC \cdot NB}{MN}$.

Tương tự: $\triangle DSN \sim \triangle NAM$ (g.g) nên $DS = \frac{NA \cdot ND}{MN}$, kết hợp với chứng minh ở câu 2 ta suy ra $DS = RC$ mà $DS \parallel RC$ cùng song song với PQ nên tứ giác $DSCR$ là hình bình hành, suy ra CD, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Theo bổ đề hình thang ta có: NO đi qua trung điểm của CD nên N, O, I thẳng hàng. $\square$

Câu 5.

Trên bảng viết một số nguyên dương n ($n \geq 3$). Hai bạn Lâm và Ngân chơi một trò chơi như sau: hai người lần lượt thực hiện lượt chơi của mình bằng cách xoá một số xuất hiện trên bảng và thay bởi hai số nguyên dương có tổng bằng nó. Người thắng cuộc là người sau khi kết thúc lượt chơi của mình mà trên bảng chỉ có các số 1 hoặc 2. Lâm là người chơi trước.

1. Chứng minh Lâm có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 6$ và Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 7$.
2. Chứng minh rằng Ngân có chiến thuật để thắng cuộc với $n = 2025$.

Gọi x, y lần lượt là số lượng số 1 và số 2 trên bảng khi trò chơi kết thúc.

Vì mỗi lượt tách một số k thành a, b ($a + b = k$) làm tăng số lượng số trên bảng lên 1, nên nếu ban đầu có 1 số (n) và kết thúc có $x + y$ số, thì tổng số lượt chơi là:

$$T = (x + y) - 1$$

Theo đề bài, tổng các số trên bảng không đổi: $x + 2y = n$.

Suy ra $x = n - 2y$. Thay vào biểu thức T :

$$T = (n - 2y) + y - 1 = n - y - 1$$

Lâm đi trước (lượt 1, 3, 5...), Ngân đi sau (lượt 2, 4, 6...).

Do đó, **Ngân thắng khi và chỉ khi T chẵn**, tức là $n - y - 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

a) Chứng minh với $n = 6$ (Lâm thắng) Lâm cần T lẻ $\iff 6 - y - 1$ lẻ $\iff y$ lẻ

• **Chiến thuật:** Nước đầu Lâm tách $6 = 3 + 3$.

• Với mọi nước đi sau đó của Ngân, nếu Ngân tách một số ở nhánh này, Lâm tách số tương ứng ở nhánh kia (chiến thuật đối xứng).

- Cách này đảm bảo mọi số 2 sinh ra đều xuất hiện theo cặp, dẫn đến y luôn chẵn.
(Lưu ý: Để Lâm thắng với $n = 6$, Lâm cần ép T lẻ $\iff y$ chẵn. Chiến thuật đối xứng phía trên tạo ra số lượng số 2 chẵn, đúng với điều kiện Lâm thắng).

- **Kết luận:** Lâm có chiến thuật thắng.

b) Chứng minh với $n = 7$ và $n = 2025$ (Ngân thắng) Ngân cần T chẵn $\iff n - y - 1$ chẵn $\iff y$ chẵn.

Chiến thuật của Ngân: Duy trì trạng thái bảng luôn gồm các cặp số bằng nhau, ngoại trừ tối đa một số lẻ $L \geq 3$.

- **Nếu Lâm tách một số trong cặp:** Ngân thực hiện thao tác tương tự trên số còn lại của cặp đó. Trạng thái bảng vẫn gồm các cặp đối xứng.
- **Nếu Lâm tách số lẻ $L = C + D$ (với C chẵn, D lẻ):**
 - Sau bước này, trên bảng xuất hiện D (lẻ mới) và C (chẵn).
 - Ngân xử lý số chẵn C : Nếu $C = 2$ thì tách thành $1 + 1$. Nếu $C > 2$ thì tách thành $\frac{C}{2} + \frac{C}{2}$.
 - Lúc này, các số mới sinh ra hoặc là 1 (không ảnh hưởng tính chẵn lẻ của y hoặc tự triệt tiêu), hoặc tạo thành cặp đối xứng mới. Số lẻ duy nhất còn lại là D .
- **Đặc biệt:** Khi Lâm tách L thành $C + 3$, Ngân tách $C = 1 + (C - 1)$. Vì C chẵn nên $C - 1$ lẻ, đảm bảo duy trì được số lẻ duy nhất D và các cặp còn lại.

Kết luận: Với chiến thuật đối xứng nêu trên, Ngân luôn đảm bảo số lượng số 2 (y) thu được là số chẵn. Do đó T chẵn, Ngân luôn là người đi nước cuối cùng và thắng cuộc. $\square$

ĐỀ 15

LỜI GIẢI

Câu 1.

- a) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(\sqrt{x^2 + 2} - x)(y + \sqrt{y^2 + 2}) = 2$. Chứng minh rằng $x = y$.
- b) Cho các số thực dương a, b . Chứng minh rằng $a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} > 1$.

a) Nhân liên hợp biểu thức thứ nhất:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x) &= (x^2 + 2) - x^2 = 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} - x &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}\end{aligned}$$

Thay vào phương trình (1):

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \cdot (\sqrt{y^2 + 2} + y) &= 2 \\ \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2} + y &= \sqrt{x^2 + 2} + x \quad (2)\end{aligned}$$

Tương tự, nhân liên hợp biểu thức thứ hai:

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2 + 2} + y)(\sqrt{y^2 + 2} - y) &= (y^2 + 2) - y^2 = 2 \\ \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2} + y &= \frac{2}{\sqrt{y^2 + 2} - y}\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $\sqrt{x^2 + 2} - x = \frac{2}{\sqrt{y^2 + 2} + y}$. Kết hợp với việc $\sqrt{y^2 + 2} - y = \frac{2}{\sqrt{y^2 + 2} + y}$, ta được:

$$\sqrt{x^2 + 2} - x = \sqrt{y^2 + 2} - y \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) về theo vế:

$$2\sqrt{y^2 + 2} = 2\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y^2 + 2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

Trừ (3) cho (2) về theo vế:

$$-2x = -2y \Rightarrow x = y. \text{ (đpcm)}$$

□

b) Theo bất đẳng thức AM-GM

$$a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} \geq \frac{1}{b+1} + b = \frac{1}{b+1} + (b+1) - 1 \geq 2 - 1 = 1.$$

Dấu bằng xảy ra nếu $b+1 = 1$, hay $b = 0$ (loại vì $b > 0$).

Vậy

$$a + b + \frac{1}{4a(b+1)^2} > 1.$$

□

Câu 2. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} (x+3)\sqrt{y^2+8y+20} + (y+4)\sqrt{x^2+6x+10} = 0 \\ 4(x+5)^2 + 6y + 11 = 3\sqrt[3]{2y+5} \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1):

$$(x+3)\sqrt{(y+4)^2+4} = -(y+4)\sqrt{(x+3)^2+1} \quad (*)$$

- $x = -3 \Rightarrow y = -4$ ta thấy không thỏa mãn.
- $x \neq -3 \Rightarrow y \neq -4$ thì bình phương hai vế phương trình (*)

$$\begin{cases} (x+3)(y+4) < 0 \\ (y+4)^2 = 4(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow y+4 = -2(x+3) \Leftrightarrow y = -2x-10$$

Thay vào phương trình (2) và rút gọn ta được:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 28x + 51 + 3\sqrt[3]{4x+15} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 8x + 16) + 3\sqrt[3]{4x+15} - (4x+13) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x+4)^2 + \frac{27(4x+15) - (4x+13)^3}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x+4)^2 - \frac{16(4x+7)(x+4)^2}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)^2 \left[1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0 \\ x = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $x = -4 \Rightarrow y = -2$

$$\text{- Với } 1 - \frac{4(4x+7)}{9\sqrt[3]{(4x+15)^2} + 3(4x+13)\sqrt[3]{4x+15} + (4x+13)^2} = 0 \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh phương trình này vô nghiệm như sau:

Để thấy với mọi x thì $4x^2 + 28x + 51 > 0$

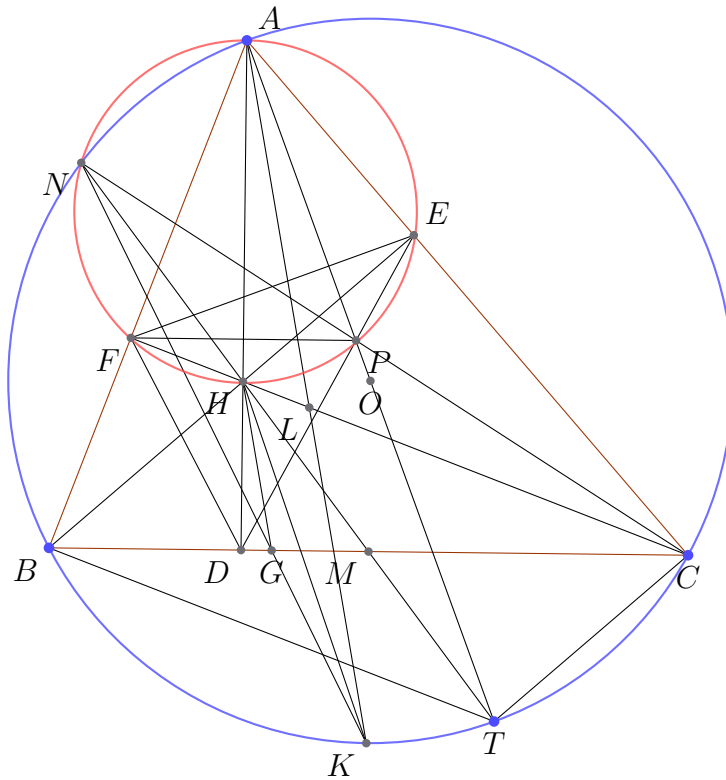
Do đó phương trình (**) có nghiệm khi $3\sqrt[3]{4x+15} < 0 \Rightarrow x < -\frac{15}{4}$. Từ đó suy ra vế trái của (3)

luôn dương, dẫn đến phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-4; -2)$ □

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , tia phân giác góc A cắt (O) tại K khác A . Trên cạnh BC lấy G sao cho $HG \parallel AK$, gọi N là giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (O) .

- Gọi P là giao điểm của DE, CN . Chứng minh rằng: Tam giác DFP cân.
- Chứng minh rằng: N, G, K thẳng hàng.



- a. Vì $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Định nghĩa lại P là giao điểm của NC với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Ta sẽ chứng minh: D, P, E thẳng hàng và tam giác DPF cân.

Thật vậy: Ta có: $\widehat{NPF} = \widehat{NAF} = \widehat{NCB}$ nên $PF \parallel BC$ mà $BH \perp AH$ nên $PF \perp AH$ dẫn đến AH là trung trực của PF hay AD là trung trực của PF dẫn đến DA là tia phân giác của $\widehat{FDP}$ và $DF = DP$.

Chứng minh được tính chất quen thuộc: DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ suy ra D, P, E thẳng hàng. $\square$

- b. Vẽ đường kính AT của (O) , chứng minh được $BHCT$ là hình bình hành nên H, M, T thẳng hàng. Ta có: $\widehat{ANH} = \widehat{ANT} = 90^\circ$ nên N, H, T thẳng hàng dẫn đến N, H, M, T thẳng hàng.

Gọi L là giao điểm của AK, HC thì $\widehat{GHC} = \widehat{KLC} = 180^\circ - \widehat{LCK} - \widehat{LKC}$. Mặt khác

$$\widehat{LCK} = \widehat{LCB} + \widehat{BCK} = 90^\circ - \widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}, \widehat{LKC} = \widehat{ABC} \text{ suy ra}$$

$$\widehat{GHC} = 180^\circ - \left(90^\circ + \widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) - \widehat{ABC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

$$\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 180^\circ - \widehat{BAC} \text{ suy ra } \widehat{BHC} = 2\widehat{GHC} \text{ hay } HG \text{ là tia phân giác của } \widehat{BHC}.$$

Ta có: $\widehat{NFA} = \widehat{NEA}$ (góc nội tiếp chắn cung NA) nên $\widehat{NFB} = \widehat{NEC}$; $\widehat{NBA} = \widehat{NCA}$ (góc nội tiếp chắn cung NA của (O)) suy ra $\triangle NFB \sim \triangle NEC$ (g.g) nên $\frac{NB}{NC} = \frac{FB}{EC} = \frac{HB}{HC} = \frac{GB}{GC}$ vậy

NG là tia phân giác của $\widehat{BNC}$ mà NK là tia phân giác của $\widehat{BNC}$ nên N, G, K thẳng hàng. $\square$

Câu 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn:

$$25^x + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4)5^y.$$

Biến đổi phương trình ban đầu, đặt $A = 4^x + 1$ và $B = 4x^2 + 3x + 3$:

$$25^x + AB = (A + B)5^y \iff (5^x - A)(5^x - B) = (A + B)(5^y - 5^x) \quad (**)$$

• **TH1:** $y = x$.

Vế phải của $(**)$ bằng 0, nên vế trái phải bằng 0. Suy ra:

$$\begin{cases} 5^x = 4^x + 1 & (1) \\ 5^x = 4x^2 + 3x + 3 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1): Với $x = 1$ thì $5 = 4 + 1$ (thỏa mãn). Với $x \geq 2$, ta có $5^x > 4^x + 1$.

- Giải (2): Với $x = 1$, $5 \neq 10$. Với $x = 2$, $5^2 = 25$ và $4(2^2) + 3(2) + 3 = 25$ (thỏa mãn). Với $x \geq 3$, ta có $5^x > 4x^2 + 3x + 3$.

Vậy ta có hai cặp nghiệm: $(x, y) = (1, 1)$ và $(x, y) = (2, 2)$.

• **TH2:** $y < x$.

Khi $y < x$, vế phải của $(**)$ âm. Để vế trái âm thì 5^x phải nằm giữa A và B .

- Với $x = 1$: $A = 5, B = 10$ thì $A \leq 5^x < B$. Nhưng $y < 1$ không có giá trị nguyên dương.

- Với $x \geq 2$: 5^x luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị lớn nhất trong $\{A, B\}$, do đó vế trái không thể âm.

• **TH3:** $y > x$ (tức là $y \geq x + 1$)

Từ phương trình đầu, ta viết lại: $AB = (A + B)5^y - 5^{2x}$.

Vì $y \geq x + 1$, cả hai số hạng bên vế phải đều chia hết cho 5^x . Do đó:

$$AB \text{ chia hết cho } 5^x$$

Xét tính chẵn lẻ của x :

1. Nếu x là số chẵn:

$$\text{Ta có } 4 \equiv -1 \pmod{5} \implies A = 4^x + 1 \equiv (-1)^{\text{chẵn}} + 1 = 2 \pmod{5}.$$

Nghĩa là A không chia hết cho 5. Vì $A \cdot B \vdots 5^x$, bắt buộc B phải chia hết cho 5^x .

$$\implies B \geq 5^x \iff 4x^2 + 3x + 3 \geq 5^x.$$

- Thử $x = 2$: $B = 25 \geq 5^2$ (đúng). Thế $x = 2$ vào phương trình ban đầu ta tính được $y = 2$. Nhưng ta đang xét $y > x$, nên bị loại.

- Với $x \geq 4$ (chẵn): Dễ dàng quy nạp chứng minh $5^x > 4x^2 + 3x + 3$. Vô nghiệm.

2. Nếu x là số lẻ:

Ta dùng khai triển hằng đẳng thức (Nhị thức Newton) cho A :

$$A = 4^x + 1 = (5 - 1)^x + 1 = 5^x - x \cdot 5^{x-1} + \dots + C_x^{x-2} 5^2 - C_x^{x-1} 5^1 + (-1)^x + 1$$

Vì x lẻ nên $(-1)^x = -1$, do đó $-1 + 1 = 0$. Nhóm 5^2 ra ngoài ở các số hạng đầu, ta được:

$$A = 5^2 \cdot K + 5x = 5(5K + x)$$

Nhận xét: Giả sử trong phân tích ra thừa số nguyên tố, x chứa k số 5 (tức là $x \vdots 5^k$ nhưng không chia hết cho 5^{k+1}). Khi đó A chia hết tối đa cho 5^{k+1} .

Vì $AB : 5^x$, mà A chỉ chia hết cho 5^{k+1} , nên phần còn lại B phải chia hết cho $5^{x-(k+1)}$.

Ta suy ra: $B \geq 5^{x-k-1}$.

Mặt khác, ta luôn có một đánh giá hiển nhiên: $5^k \leq x$.

Do đó: $B \geq \frac{5^{x-1}}{5^k} \geq \frac{5^{x-1}}{x} \implies x \cdot B \geq 5^{x-1} \implies x(4x^2 + 3x + 3) \geq 5^{x-1}$.

Đến đây, ta chỉ cần thử vài giá trị lẻ:

- $x = 1 \implies 1(10) \geq 1$ (Thỏa mãn. Nhưng thử lại phương trình gốc ra $y = 1$, loại do $y > x$).
- $x = 3 \implies 3(48) \geq 25$ (Thỏa mãn. Nhưng với $x = 3, k = 0 \implies B : 5^{3-1} \iff 48 : 25$ là vô lý).
- $x = 5 \implies 5(118) \geq 625 \iff 590 \geq 625$ (Vô lý).
- Với $x \geq 7$ (lẻ): Dễ dàng quy nạp chứng minh hàm lũy thừa 5^{x-1} tăng nhanh hơn rất nhiều so với hàm đa thức $4x^3 + 3x^2 + 3x$. Ta luôn có $5^{x-1} > x(4x^2 + 3x + 3)$. Vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình chỉ có đúng 2 cặp nghiệm nguyên dương là $(1, 1)$ và $(2, 2)$. □

Câu 5. Cho một bảng kẻ ô vuông 2026×2026 và một hộp đựng k viên sỏi (k là số nguyên dương). Gọi (i, j) là ô nằm ở hàng thứ i và cột thứ j , với $1 \leq i, j \leq 2026$ (ở đây, ô $(1, 1)$ là ô nằm ở góc trên cùng bên trái).

Ban đầu bảng không có sỏi. Ta được phép lấy từ hộp một viên sỏi đặt vào một ô trống (i, j) nếu ô này thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $j = 1$ hoặc ô $(i, j - 1)$ có sỏi.
- $i = 2026$ hoặc ô $(i + 1, j)$ có sỏi.

Ngoài ra, ta được phép lấy một viên sỏi bất kỳ trên bảng rồi bỏ vào hộp. Hỏi giá trị nhỏ nhất của k là bao nhiêu để có thể đạt được trạng thái là ô $(1, 2026)$ có sỏi?

Đặt $n = 2026$. Đầu tiên, ta chứng minh $k = n + 1$ thỏa mãn. Đầu tiên đặt sỏi như sau:

$$(n, 1), (n, 2), \dots, (n, n) \rightarrow (n - 1, 1).$$

Vậy, toàn bộ sỏi nằm ở dòng thứ n và một viên nằm ở $(n - 1, 1)$.

$$(n, 1) \rightarrow (n - 1, 2); (n, 2) \rightarrow (n - 1, 3); \dots; (n, n - 1) \rightarrow (n - 1, n); (n, n) \rightarrow (n - 2, 1).$$

Vậy, toàn bộ sỏi bây giờ nằm ở dòng thứ $n - 1$ và một viên sỏi nằm ở $(n - 2, 1)$. Cứ làm như vậy ta đưa được sỏi về:

$$(1, 1), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n).$$

Từ đó, ta chuyển sỏi:

$$(2, 1) \rightarrow (1, 2), (2, 2) \rightarrow (1, 3), \dots, (2, n - 1) \rightarrow (1, n).$$

Vậy ta có thể đặt sỏi vào ô $(1, n)$ hay $(1, 2026)$.

Ta chứng minh $k \geq n + 1$ bằng quy nạp theo $n \geq 2$. Khẳng định hiển nhiên với $n = 2$. Xét bảng $n \times n$ và giả sử k thỏa mãn yêu cầu bài toán. Để có sỏi tại $(1, n)$ ta cần hai viên tại $(2, n)$ và $(1, n - 1)$. Xét bảng vuông con A gồm các hàng:

$$(1, \dots, n - 1) \quad \text{và các cột} \quad (1, \dots, n - 1);$$

Bảng vuông con B gồm các hàng:

$$(2, \dots, n) \quad \text{và các cột} \quad (2, \dots, n).$$

Theo giả thiết quy nạp, để có sỏi tại $(2, n)$ của bảng B ta cần ít nhất n viên sỏi nằm trong B và do đó khác với viên nằm tại $(1, n - 1)$. Thành thử số sỏi tối thiểu cần ít nhất $1 + n$. $\square$

ĐỀ 16

LỜI GIẢI

Câu 1.

1) Giải phương trình sau:

$$2x^2 + x + \sqrt{x^2 + 3} + 2x\sqrt{x^2 + 3} = 9$$

2) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $(a^2 + 1)(b + c) = (b^2 + 1)(c + a) = -10$.
Tính giá trị của biểu thức $P = (a + b)(b + c)(c + a)$.

1. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x + \sqrt{x^2 + 3})(2x + 1) = 9 \\ \Leftrightarrow & (2x + 1) \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = 9 \\ \Leftrightarrow & 2x + 1 = 3(\sqrt{x^2 + 3} - x) \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt{x^2 + 3} = 5x + 1 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ 8x^2 + 5x - 13 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

2. Từ giả thiết ta có $(a^2 + 1)(b + c) = (b^2 + 1)(c + a)$, khai triển ta có

$$a^2b + a^2c + b + c = b^2c + b^2a + c + a$$

Chuyển vế ta có

$$\begin{aligned} & a^2b + a^2c + b + c - b^2c - b^2a - c - a = 0 \\ & (a^2b - b^2a) + (a^2c - b^2c) + (b - a) = 0 \\ & ab(a - b) + c(a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \\ & (a - b)(ab + ca + cb - 1) = 0 \end{aligned}$$

Lưu ý rằng a, b, c là đôi một phân biệt, nên $ab + bc + ca = 1$. Suy ra

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c),$$

do đó

$$-10 = (a^2 + 1)(b + c) = (a + b)(b + c)(c + a).$$

Vậy $P = -10$. □

Câu 2.

- 1) Một tiệm bánh ngọt dự định sản xuất hai loại bánh cho một đơn hàng. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 40 g và 60 g. Lợi nhuận thu được khi bán mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 12 nghìn đồng và 15 nghìn đồng. Biết rằng tiệm chỉ còn 14 kg đường để làm bánh và tiệm phải làm ít nhất 80 chiếc bánh loại I và 100 chiếc bánh loại II. Hỏi tiệm nên làm bao nhiêu chiếc bánh mỗi loại để lợi nhuận thu được là lớn nhất?
- 2) Với a, b, c là ba số nguyên dương, xét hai phương trình bậc hai sau đây:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{và} \quad ax^2 + bx - c = 0$$

Giả sử hai phương trình trên có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng abc chia hết cho 30.

1. Gọi x, y ($x, y \in \mathbb{N}$) lần lượt là số bánh loại I, II cần sản xuất thì theo giả thiết:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 100 \\ 40x + 60y \leq 14000 \end{cases} \quad \text{hay} \quad 2x + 3y \leq 700$$

Ta cần tìm x, y sao cho lợi nhuận thu được $A = 12x + 15y$ (nghìn đồng) đạt giá trị lớn nhất.

Ta có

$$A = 12x + 15y = 6(2x + 3y) - 3y \leq 6 \cdot 700 - 3 \cdot 100 = 3900$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x + 3y = 700 \\ y = 100 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$ (thỏa mãn $x \geq 80$)

Vậy tiệm nên làm 200 bánh loại I và 100 bánh loại II. □

2.

• **Chứng minh $2 \mid abc$.**

- ★ Nếu b chẵn, hiển nhiên abc chia hết cho 2.
- ★ Nếu b lẻ thì $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Lại do $b^2 - 4ac$ và $b^2 + 4ac$ là các số chính phương lẻ nên ta lần lượt suy ra:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac, b^2 + 4ac &\equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 4ac \equiv 0 \pmod{8} \\ &\Rightarrow 2 \mid ac \\ &\Rightarrow 2 \mid abc. \end{aligned}$$

• **Chứng minh $3 \mid abc$.**

- ★ Nếu b chia hết cho 3, hiển nhiên abc chia hết cho 3.
- ★ Nếu b không chia hết cho 3 thì $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Lại do $b^2 - 4ac$ và $b^2 + 4ac$ là các số chính phương nên ta lần lượt suy ra:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &\equiv 0, 1 \pmod{3} \Rightarrow 4ac \equiv 1, 0 \pmod{3} \Rightarrow ac \equiv 1, 0 \pmod{3}, \\ b^2 + 4ac &\equiv 0, 1 \pmod{3} \Rightarrow 4ac \equiv 2, 0 \pmod{3} \Rightarrow ac \equiv 2, 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Đối chiếu, ta chỉ ra ac chia hết cho 3, vậy nên abc cũng chia hết cho 3.

• **Chứng minh** $5 \mid abc$.

★ Nếu b chia hết cho 5, hiển nhiên abc chia hết cho 5.

★ Nếu b không chia hết cho 5 thì $b^2 \equiv 1, 4 \pmod{5}$.

◇ Với $b^2 \equiv 1 \pmod{5}$, do $b^2 - 4ac$ và $b^2 + 4ac$ là các số chính phương nên ta có:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &\equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \Rightarrow 4ac \equiv 1, 0, 2 \pmod{5} \\ &\Rightarrow ac \equiv 4, 0, 3 \pmod{5}, \\ b^2 + 4ac &\equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \Rightarrow 4ac \equiv 4, 0, 3 \pmod{5} \\ &\Rightarrow ac \equiv 1, 0, 2 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Đối chiếu, ta chỉ ra ac chia hết cho 5, vậy nên abc cũng chia hết cho 5.

◇ Với $b^2 \equiv 4 \pmod{5}$, bằng cách làm tương tự, ta cũng có abc chia hết cho 5.

Thông qua các bước làm bên trên, ta nhận thấy abc chia hết cho $[2, 3, 5] = 30$.

Như vậy, bài toán đã cho được chứng minh. □

Câu 3. Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a(1-b)}{3-a} + \frac{b(1-c)}{3-b} + \frac{c(1-a)}{3-c}$$

Lời giải. Chú ý $0 \leq ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}$.

Tìm min. Bằng biến đổi tương đương, ta chứng minh được

$$\frac{x}{3-x} \geq \frac{27x-1}{64}, \quad \forall x < 3.$$

Suy ra

$$P \geq \sum \frac{(27a-1)(1-b)}{64}.$$

Do đó

$$P \geq \frac{27 - 27 \sum ab - 2}{64} \geq \frac{27 - 9 - 2}{64} = \frac{1}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{4}$.

Tìm max: Ta có

$$P \leq \sum \frac{a(1-b)}{2} = \frac{\sum a - \sum ab}{2}.$$

Suy ra

$$P \leq \frac{1 - \sum ab}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $b = c = 0$ và $a = 1$.

Giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. □

Giải thích lời giải

Phần Max

Tác giả viết: $\frac{a(1-b)}{3-a} \leq \frac{a(1-b)}{2}$. Tại sao lại có số 2?

Rất đơn giản là đề cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của a là mấy? Chắc chắn là $a \leq 1$.

Nếu $a \leq 1 \implies -a \geq -1 \implies 3 - a \geq 2$.

Khi mẫu số lớn hơn hoặc bằng 2, thì phân số sẽ nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$.

Vậy ta có ngay: $\frac{1}{3-a} \leq \frac{1}{2}$.

Phần Min

◦ Biểu thức P đối xứng vòng quanh với a, b, c và $a + b + c = 1$. Vậy ta mạnh dạn đoán dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

◦ Ta muốn tìm giá trị m, n thoả mãn:

$$\frac{a}{3-a} \geq ma + n \quad (\text{với mọi } a)$$

◦ Và dấu "=" phải xảy ra đúng tại điểm rơi $a = \frac{1}{3}$. (Đây chính là phương pháp tiếp tuyến đã được đề cập ở lời giải của những đề trước.)

Vì dấu "=" xảy ra tại $a = \frac{1}{3}$, nên giá trị 2 vế phải bằng nhau tại đây:

$$\frac{1/3}{3-1/3} = m\left(\frac{1}{3}\right) + n \implies \frac{1}{8} = \frac{m}{3} + n \quad (1)$$

Mặt khác, ta chuyển về bất đẳng thức:

$$\frac{a}{3-a} - (ma + n) \geq 0 \iff \frac{a - (3-a)(ma + n)}{3-a} \geq 0$$

Vì mẫu số $3-a > 0$, nên tử số phải ≥ 0 :

$$a - (3ma + 3n - ma^2 - na) \geq 0$$

$$ma^2 + (1 - 3m + n)a - 3n \geq 0$$

Chú ý kỹ chỗ này: Để một đa thức bậc hai luôn ≥ 0 và có dấu "=" tại $a = \frac{1}{3}$, thì $a = \frac{1}{3}$ phải là **nghiệm kép** của đa thức đó.

Tức là đa thức này phải có dạng: $m\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 = 0$.

$$\text{Khai triển ra: } m\left(a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}\right) = ma^2 - \frac{2m}{3}a + \frac{m}{9}.$$

Đồng nhất hệ số của đa thức này với đa thức ta vừa tìm được ở trên:

$$\circ \text{ Hệ số của } a: 1 - 3m + n = -\frac{2m}{3}$$

$$\circ \text{ Hệ số tự do: } -3n = \frac{m}{9} \implies m = -27n$$

Bây giờ thế $m = -27n$ vào phương trình hệ số của a :

$$1 - 3(-27n) + n = -\frac{2(-27n)}{3}$$

$$1 + 81n + n = 18n$$

$$1 + 82n = 18n \implies 64n = -1 \implies n = -\frac{1}{64}$$

Từ đó tính được: $m = -27\left(-\frac{1}{64}\right) = \frac{27}{64}$.

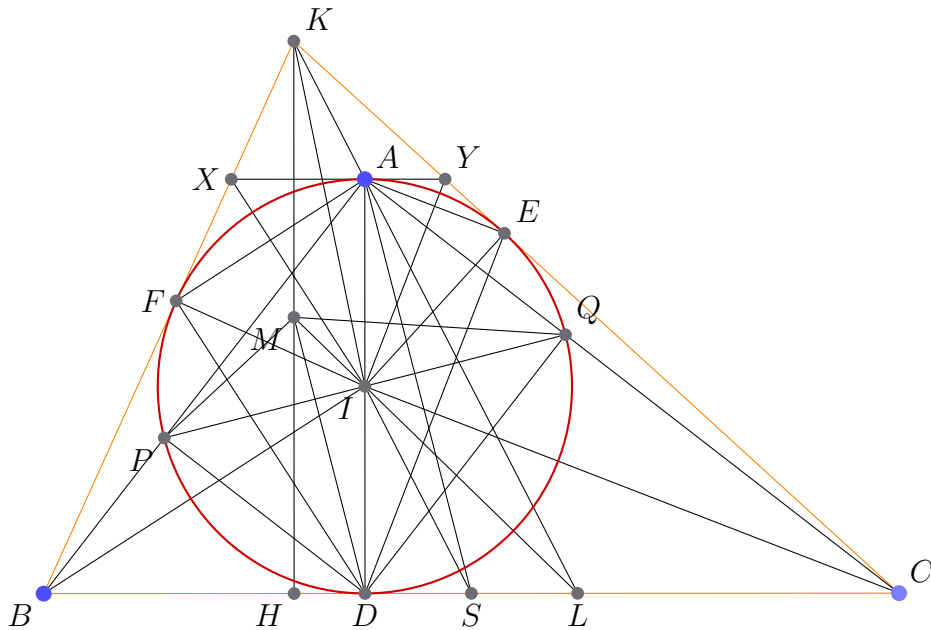
Thế m và n vào $ma + n$, ta được chính xác biểu thức:

$$\frac{27}{64}a - \frac{1}{64} = \frac{27a - 1}{64}$$

Và đó chính là lý do tác giả có được đánh giá "trên trời rơi xuống" $\frac{a}{3-a} \geq \frac{27a-1}{64}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AD . Gọi I là trung điểm AD ; gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của D qua IC, IB . Các đường thẳng BF, CE cắt nhau tại điểm K , đường thẳng AK cắt BC tại L . Gọi H là chân đường cao hạ từ K lên BC , M là trung điểm của HK .

- 1) Chứng minh: $BD = CL$.
- 2) Chứng minh: $4S_{ABC} = 3S_{KBC}$.
- 3) Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D lên AB, AC . Chứng minh: PQ vuông góc với DM .



1. Từ giả thiết bài toán ta suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KBC . D, E, F là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB . Theo bổ đề hình thang ta có: M, I, L thẳng hàng. Vẽ đường thẳng qua A song song với BC cắt KB, KC tại X, Y thì $\widehat{BIX} = \frac{1}{2}\widehat{DIF} + \frac{1}{2}\widehat{AIF} = 90^\circ$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BIX ta có:

$$IF^2 = FB \cdot FX = AX \cdot BD = IE^2 = EY \cdot EC = AY \cdot CD.$$

Suy ra $\frac{XA}{YA} = \frac{CD}{BD}$, theo định lí Thalès ta cũng có: $\frac{XA}{YA} = \frac{LB}{LC}$ dẫn đến $\frac{CD}{BD} = \frac{LB}{LC}$ suy ra $\frac{BC}{BD} = \frac{BC}{LC}$ dẫn đến $BD = CL$.

2. Từ chứng minh câu 1 ta có: $\triangle XAI \sim \triangle IDB$ (g.g) dẫn đến $\frac{XA}{ID} = \frac{AI}{BD}$ suy ra

$$XA = \frac{ID \cdot IA}{BD} = \frac{AD^2}{4BD} = \frac{DB \cdot DC}{4DB} = \frac{DC}{4},$$

chứng minh tương tự ta có: $AY = \frac{BD}{4}$ dẫn đến $XY = \frac{BC}{4}$, từ đó theo định lí Thalès ta có:

$$\frac{AD}{KH} = \frac{AL}{KL} = \frac{YC}{KC} \text{ mà } \frac{KY}{KC} = \frac{XY}{BC} = \frac{1}{4}$$

nên $\frac{YC}{KC} = \frac{3}{4}$ suy ra $\frac{S_{ABC}}{S_{KBC}} = \frac{AD}{KH} = \frac{3}{4}$ hay $4S_{ABC} = 3S_{KBC}$.

3. Gọi S là trung điểm của BC , từ chứng minh ở câu 2 ta suy ra S là trung điểm của DL .

Ta có $\frac{LD}{LH} = \frac{3}{4}$ suy ra $\frac{LD}{HD} = 3$ mà S là trung điểm của DL nên $\frac{SD}{HD} = \frac{3}{2}$ hay $\frac{HD}{SD} = \frac{2}{3}$.

Ta cũng có: $\frac{MH}{AD} = \frac{1}{2} \frac{KH}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ suy ra $\frac{HD}{SD} = \frac{MH}{AD}$ dẫn đến $\triangle MHD \sim \triangle ADS$ (c.g.c) suy ra $\widehat{MDH} = \widehat{ASD}$ nên $MD \parallel SA$.

Lại có: $AP \cdot AB = AD^2 = AQ \cdot AC$ dẫn đến $\triangle AQP \sim \triangle ABC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{AQP} = \widehat{ABC}$ mà $SA = SB = SC$ suy ra $\widehat{SAC} + \widehat{AQP} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ hay $AS \perp PQ$ suy ra $MD \perp PQ$. $\square$

Câu 5.

- 1) Tồn tại hay không số nguyên dương n để $2n - 1, 5n - 1, 13n - 1$ đồng thời là số chính phương.
- 2) Cho chín điểm trên mặt phẳng, cứ bất kỳ ba điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà cạnh được tô xanh hoặc tô đỏ, trong đó bao giờ cũng có cạnh đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tứ giác có các cạnh và các đường chéo cùng tô màu đỏ.

1. Giả sử tồn tại số nguyên dương n thỏa đề. Khi đó, ta có thể đặt

$$2n - 1 = x^2 \quad (1)$$

$$5n - 1 = y^2 \quad (2)$$

$$13n - 1 = z^2 \quad (3)$$

Ta có x lẻ từ (1), nên cả y và z đều là số lẻ. Lấy $4 \cdot (1) + (2) - (3)$ theo vế, ta chỉ ra

$$-4 = 4x^2 + y^2 - z^2 \iff z^2 - y^2 = 4(x^2 + 1). \quad (4)$$

Ta đã biết, một số chính phương chỉ có thể đồng dư với 0, 1 hoặc 4 theo modulo 8. Tuy nhiên, do cả z và y đều lẻ nên ta có

$$z^2 - y^2 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{8} \quad (5)$$

Mặt khác, do x lẻ nên $x^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, và như vậy,

$$2(x^2 + 1) \equiv 4 \pmod{8} \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6), ta chỉ ra điều mâu thuẫn. Như vậy giả sử sai, và bài toán được chứng minh. $\square$

2. Xét hai trường hợp

- Trong chín điểm tồn tại điểm A là đầu mút của ít nhất bốn cạnh xanh. Giả sử AB, AC, AD, AE là bốn cạnh xanh. Khi đó tứ giác tạo bởi bốn đỉnh B, C, D, E sẽ là tứ giác thoả mãn bài toán vì nếu không thì trong tứ giác này sẽ có một đoạn thẳng nếu hai đỉnh được tô màu xanh, giả sử BC được tô xanh. Nhưng lúc này tam giác ABC sẽ không có cạnh đỏ là trái với giả thiết.
- Tất cả các đỉnh có số cạnh xanh xuất phát từ đỉnh đó không vượt quá 3. Khi đó, tồn tại một đỉnh mà số cạnh xanh xuất phát từ đỉnh đó không vượt quá 2 vì nếu không thì mọi đỉnh đều là đầu mút của đúng ba cạnh xanh. Và do đó, số cạnh xanh sẽ là $\frac{9 \cdot 3}{2}$ không phải là số nguyên. Giả sử A là đỉnh mà số cạnh xanh xuất phát từ A không vượt quá 2. Khi đó, A là đầu mút của ít nhất sáu cạnh màu đỏ, giả sử là AB, AC, AD, AE, AF, AG . Áp dụng bài toán Ramsey cho sáu điểm B, C, D, E, F, G thì tồn tại một tam giác giả sử là BCD có ba cạnh cùng màu và tam giác này có ba cạnh màu đỏ. Khi đó tứ giác $ABCD$ thoả mãn bài toán. $\square$

ĐỀ 17

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thoả mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = abc$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b}(c + a) + \frac{b}{c}(a + b) + \frac{c}{a}(b + c).$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (3xy - 2)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x^2 - 3xy^2 = y(y - 2) \end{cases}$$

1. Từ giả thiết, ta có:

$$1 = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{b}(c + a) + \frac{b}{c}(a + b) + \frac{c}{a}(b + c) \\ &= \frac{a}{b}(a + b + c) + \frac{b}{c}(a + b + c) + \frac{c}{a}(a + b + c) - a - b - c \\ &= (a + b + c) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - a - b - c = 0. \end{aligned}$$

Vậy $P = 0$. □

2. Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (3xy - 2)^2 + 4x^2 = 5y^2 & (1) \\ 2x^2 - 3xy^2 = y(y - 2) & (2) \end{cases}$$

Ta thấy khi $y = 0$ thì từ (2) có $x = 0$, thay lại vào (1) thì không thoả mãn.

Xét $y \neq 0$, từ (2) ta có $y(3xy - 2) = 2x^2 - y^2 \Leftrightarrow 3xy - 2 = \frac{2x^2 - y^2}{y} = \frac{2x^2}{y} - y$.

Thay vào (1) thì

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x^2}{y} - y \right)^2 + 4x^2 &= 5y^2 \Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2} - 4x^2 + y^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4x^4}{y^2} &= 4y^2 \Rightarrow x^4 = y^4 \Leftrightarrow (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: Nếu $x^2 = -y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, không thoả mãn.

Trường hợp 2: Nếu $x = y$ thì từ (2)

$$2x^2 - 3x^3 = x(x - 2) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 (L) \\ x = y = 1 \\ x = y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Trường hợp 3: Nếu $x = -y$ thì từ (2)

$$2x^2 - 3x^3 = -x(-x - 2) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - x + 2) = 0.$$

Mà $3x^2 - x + 2 > 0$ nên $x = 0$ kéo theo $y = 0$, không thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm (x, y) là $(1, 1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. □

Câu 2.

1. Cho đa thức $f(x) = a^{2026}x^2 + bx + a^{2026}c - 1$, với a, b, c là các số nguyên. Giả sử rằng phương trình $f(x) = -2$ có hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{(f(1))^2 + (f(-1))^2}{2}$ là hợp số.
2. Với p là số nguyên tố lẻ, đặt $A = 23p + 3^p - 4$. Chứng minh rằng:
 - a) A không phải là bình phương của bất kì số tự nhiên nào.
 - b) A không phải là tích của bất kì hai số nguyên dương liên tiếp nào.

1. Giả sử $a^{2026}x^2 + bx + a^{2026}c - 1 = 0$ có 2 nghiệm nguyên là r và s

Khi đó:

$$r \cdot s = c + \frac{1}{a^{2026}} \in \mathbb{Z}$$

nên

$$a^{2026} = 1$$

Do đó:

$$f(x) = x^2 + bx + c - 1$$

Xét

$$f(x) = x^2 + bx + c - 1 = -2 \text{ hay } x^2 + bx + c + 1 = 0$$

Theo định lý Viét, ta có:

$$\begin{cases} r + s = -b \\ rs = c + 1 \end{cases}$$

Lại có:

$$\begin{cases} f(1) = b + c \\ f(-1) = c - b \end{cases}$$

Do đó:

$$(f(1))^2 + f(-1)^2 = (b + c)^2 + (c - b)^2 = 2(b^2 + c^2)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{(f(1))^2 + f(-1)^2}{2} &= b^2 + c^2 \\ &= (r + s)^2 + (rs - 1)^2 \\ &= r^2s^2 + r^2 + s^2 + 1 \\ &= (r^2 + 1)(s^2 + 1) \end{aligned}$$

Vì $r^2 + 1 \geq 2$, $s^2 + 1 \geq 2$ nên $\frac{(f(1))^2 + (f(-1))^2}{2}$ là hợp số.

Vậy $\frac{(f(1))^2 + (f(-1))^2}{2}$ là hợp số.

2. a) Giả sử tồn tại số tự nhiên x sao cho $23p + 3^p - 4 = x^2$. Theo định lí Fermat – nhỏ, ta có:

$$x^2 + 1 = 23p + 3^p - 3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta suy ra $x^2 + 1$ chia hết cho p và p phải có dạng $4k + 1$. Điều này kéo theo

$$23p + 3^p - 4 = x^2 \equiv -p + (-1)^p \equiv 2 \pmod{4}.$$

Do $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, nên điều này mâu thuẫn. Vậy A không là số chính phương.

b) Giả sử tồn tại số nguyên dương x sao cho $23p + 3^p - 4 = x(x + 1)$. Ta xét các trường hợp tiếp theo.

* **Trường hợp 1.** Nếu $p = 3$, ta có $A = 92$, không là tích của hai số nguyên dương liên tiếp nào.

* **Trường hợp 2.** Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$, ta có

$$x^2 + x + 1 = 23p \equiv 23 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Đây là điều vô lí, do $x^2 + x + 1 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, với mọi số nguyên x .

* **Trường hợp 3.** Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$, áp dụng định lí Fermat – nhỏ, ta có

$$x^2 + x + 1 = 23p + 3^p - 3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta nhận được $x^2 + x + 1$ chia hết cho p .

Theo như kiến thức đã học, ta có 1 chia hết cho p , mâu thuẫn.

Vậy A không phải là tích bất kì hai số nguyên dương liên tiếp nào. □

Câu 3. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+2)}{2a^2+1} + \frac{b(b+2)}{2b^2+1} + \frac{c(c+2)}{2c^2+1} \geq 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a(a+2)}{2a^2+1} + \frac{b(b+2)}{2b^2+1} + \frac{c(c+2)}{2c^2+1} &\geq 0 \\ \frac{2a^2+4a}{2a^2+1} + \frac{2b^2+4b}{2b^2+1} + \frac{2c^2+4c}{2c^2+1} &\geq 0 \\ \frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} + \frac{(2c+1)^2}{2c^2+1} &\geq 3 \end{aligned}$$

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số a, b, c luôn tồn tại 2 số cùng phía với 0

Không mất tính tổng quát, giả sử là a và b .

Khi đó, ta có: $ab \geq 0$ kéo theo $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 4ab \leq (a+b)^2 = c^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng Engel ta có:

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} \geq \frac{(2a+2a+2)^2}{2(a^2+b^2)+2} \geq \frac{2(c-1)^2}{c^2+1}$$

Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức 1 biến:

$$\begin{aligned} \frac{2(c-1)^2}{c^2+1} + \frac{(2c+1)^2}{2c^2+1} &\geq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2(c-1)^2(2c^2+1) + (2c+1)^2(c^2+1)}{(c^2+1)(2c^2+1)} &\geq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2(c^2-2c+1)(2c^2+1) + (4c^2+4c+1)(c^2+1) - 3(c^2+1)(2c^2+1)}{(c^2+1)(2c^2+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 2 + 4c^4 + 4c^3 + 5c^2 + 4c + 1 - 6c^4 - 9c^2 - 3}{(c^2+1)(2c^2+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2c^4 - 2c^2}{(c^2+1)(2c^2+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2c^2(c-1)^2}{(c^2+1)(2c^2+1)} &\geq 0 \text{ luôn đúng.} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Mở rộng: Một bài toán tương tự cho bạn luyện tập:

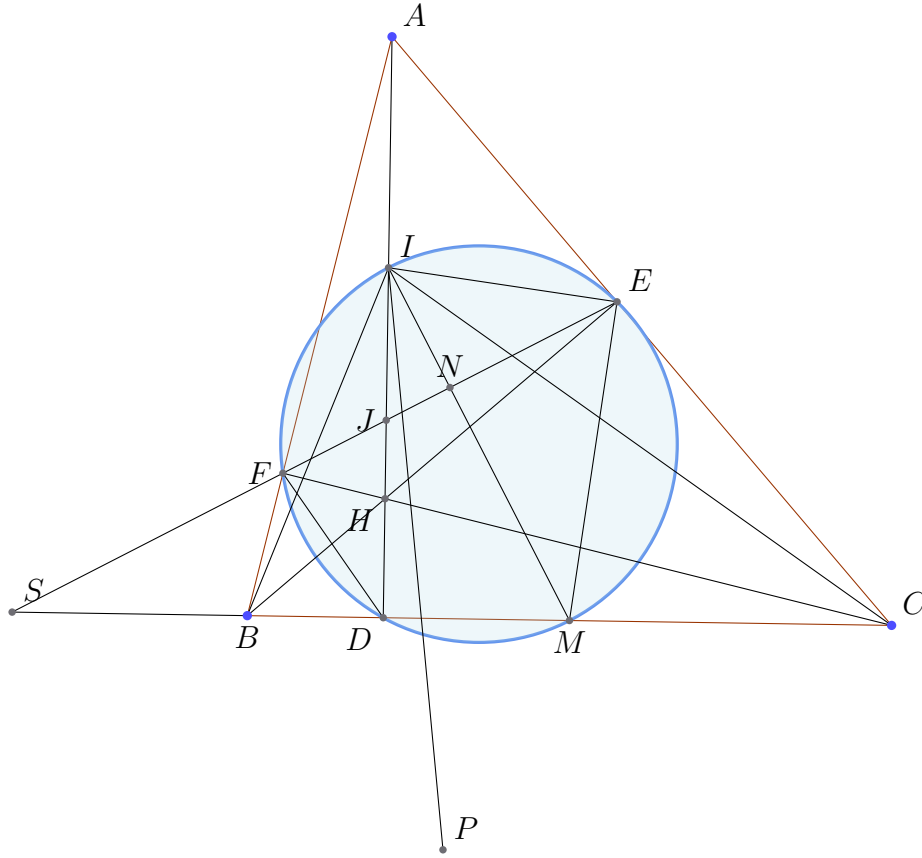
Cho a, b, c thực có tổng là 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+9} + \frac{b}{b^2+9} + \frac{c}{c^2+9} \leq \frac{3}{10}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, không cân và có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Gọi M, N, I tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF, AH . Các đường thẳng AH, BC theo thứ tự cắt đường thẳng EF tại J, S .

1. Chứng minh rằng $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SJ \cdot SN$.
2. Chứng minh rằng J là trực tâm của tam giác IBC .

3. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC . Chứng minh rằng $\widehat{BIP} = \widehat{CIM}$.



a) Ta có tam giác BFC vuông tại F và tam giác BEC vuông tại E . Mà M là trung điểm của BC . Suy ra $MB = MC = ME = MF$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (M, MB) .

Ta có: $\angle SFB = 180^\circ - \angle BFE = \angle BCE$, và góc FSB chung thì $\triangle SBF \sim \triangle SEC$ (g.g).

$$\text{Khi đó } \frac{SF}{SB} = \frac{SC}{SE} \Leftrightarrow SF \cdot SE = SB \cdot SC. \quad (1)$$

Vì tam giác AEH vuông tại H có I là trung điểm AH nên $IA = IE = IH$.

Ta có: $\angle IEM = 180^\circ - \angle IEA - \angle MEC = 180^\circ - \angle IAE - \angle MCE = 90^\circ$.

Tương tự thì $\angle IFM = 90^\circ$. Như vậy $\angle IDM = \angle IEM = \angle IFM = 90^\circ$.

Ta chứng minh được 5 điểm I, F, E, M, D thuộc một đường tròn.

Do đó tứ giác $DFEM$ nội tiếp suy ra $\angle FDS = 180^\circ - \angle FDM = \angle FEM$, và góc FSB chung.

$$\text{Dẫn đến } \triangle SDF \sim \triangle SEM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SD}{SE} = \frac{SF}{SM} \Leftrightarrow SM \cdot SD = SE \cdot SF. \quad (2)$$

Mặt khác $IE = IF, NE = NF, ME = MF$ nên I, M, N thẳng hàng và IM vuông góc EF tại N .

$$\text{Ta chứng minh được } \triangle SDJ \sim \triangle SNM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{SD}{SN} = \frac{SJ}{SM} \Leftrightarrow SM \cdot SD = SN \cdot SJ. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) thì $SB \cdot SC = SE \cdot SF = SN \cdot SJ$.

b) Ta có $\angle BFE = 180^\circ - \angle BCA = \angle DHE = \angle AHB$.

Dẫn đến $\triangle ABH \sim \triangle EBF (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BF} = \frac{AH}{EF} = \frac{IH}{NF}$, $\angle BFE = \angle AHB$ thì

$$\triangle IBH \sim \triangle NBF (c.g.c) \Rightarrow \angle BIH = \angle BNJ. (4)$$

Từ câu a $\frac{SB}{SN} = \frac{SJ}{SC} \Rightarrow \triangle SBN \sim \triangle SJC (c.g.c) \Rightarrow \angle SNB = \angle SCJ. (5)$

Từ (4), (5) thì

$$90^\circ = \angle IBD + \angle BID = \angle IBD + \angle BNJ = \angle IBD + \angle SCJ.$$

Suy ra JC vuông góc IB . Kết hợp với IJ vuông góc BC . Như vậy J là trực tâm của tam giác IBC .
c) Ta có tam giác IEM vuông tại E và IN là đường cao nên

$$MN \cdot MI = ME^2 = MB^2 \Rightarrow \frac{MN}{MB} = \frac{MB}{MI} \Rightarrow \triangle MBN \sim \triangle MIB (c.g.c).$$

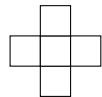
Suy ra $\frac{MB}{BN} = \frac{MI}{IB} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{BI}{BP}$, ($BP = BN, MB = MC$).

Và $\angle IBP = \angle IBM + \angle MBP = \angle IBM + \angle MBN = \angle IBM + \angle BIM = \angle IMC$.

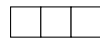
Do đó $\triangle PBI \sim \triangle CMI (c.g.c)$.

Vậy $\angle BIP = \angle MIC$. □

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước $n \times n$ và hai loại miếng ghép hình "dấu cộng", "dấu trừ" như hình dưới đây. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép, các miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép "dấu trừ" có thể xoay 90° .

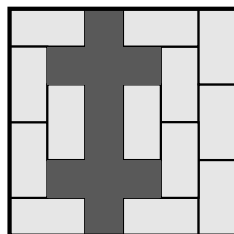


Dấu cộng



Dấu trừ

- Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n = 6$.
- Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n \times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép đã cho.

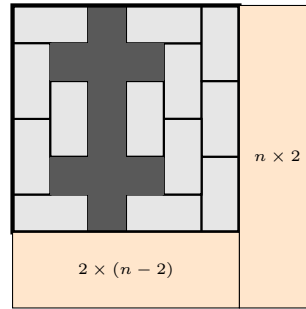


Ta ghép 2 dấu cộng và 13 dấu trừ như trên thì thỏa mãn bài toán.

2) Ta chứng minh với n là số chẵn không nhỏ hơn 6 thì thỏa mãn bài toán. Thật vậy:

- Với $n = 2; 4$ dễ thấy không có cách ghép dấu cộng và trừ thỏa mãn.
- Với $n = 6$ thỏa mãn theo câu 1).

- Với n là số chẵn và lớn hơn 6.



Ta dễ dàng tô được bằng cách ghép thêm các dấu trừ vào phần màu cam còn lại.

- Với n là số lẻ. Ta đánh các số 1 và 2 xen kẽ vào bảng như sau:

1	2	1	2	1	2	...	1
2	1	2	1	2	1	...	2
1	2	1	2	1	2	...	1
2	1	2	1	2	1	...	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	2	1	2	1	2	...	1

Mỗi lần ghép một dấu trừ sẽ phủ hai ô là 1 và 2 hay có tổng là 3.

Mỗi lần ta ghép một dấu cộng sẽ phủ bởi 4 ô số 2 và 1 ô số 1 hoặc 4 ô số 1 và 1 ô số 2, hay có tổng là 9 hoặc 6.

Vậy tổng các số trong các ô được phủ là chia hết cho 3. Mà tổng tất cả các số trong bảng ban đầu là $\frac{3}{2} \cdot (n^2 - 1) + 1$ không chia hết cho 3.

Do đó không thể phủ kín bảng $n \times n$ bởi các dấu cộng và trừ với n là số lẻ. □

ĐỀ 18

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Giải phương trình: $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$.
- Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn:

$$a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b).$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$.

1. Điều kiện xác định: $x \geq -2$.

Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$x^2 + 2x\sqrt{x+2} + (x+2) = 0$$

hay là

$$(x + \sqrt{x+2})^2 = 0.$$

Ta được $x + \sqrt{x+2} = 0$. Nếu $-2 \leq x < -1$ thì vế trái âm (vô lý), nếu $x > -1$ thì vế trái dương (vô lý).

Với $x = -1$ thay vào thỏa mãn. Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. $\square$

2. Đặt $a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b) = K$ và $a+b+c = S$. Khi đó a, b, c là nghiệm đa thức

$$P(x) = x^2 - 2x(S-x) - K = 3x^2 - 2xS - K.$$

Vì $P(x)$ là đa thức bậc 2 nên có tối đa 2 nghiệm, suy ra trong a, b, c có ít nhất hai số bằng nhau. Không mất tính tổng quát giả sử $a = b$. Ta dễ dàng tính được $M = 0$. $\square$

Câu 2.

- Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 = 2xy(x-2y) + 5$.
- Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn số $m^2 - mn + 4n^2$ chia hết cho 25. Chứng minh số $m^2 + mn + 4n^2$ cũng chia hết cho 25.

1. Giả thiết cho tương đương với

$$(x-2y)^2 + 4xy - 2xy(x-2y) = 5 \Leftrightarrow (x-2y)^2 - 2xy(x-2y) + x^2y^2 - (x^2y^2 - 4xy + 4) = 1.$$

$$(x-2y-xy)^2 - (xy-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2y-2xy+2)(x-2y-2) = 1.$$

Do x, y là số nguyên nên $x-2y-2xy+2$ và $x-2y-2$ là ước của 1. Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1.** $x-2y-2xy+2 = x-2y-2 = 1$. Suy ra $xy = 2$ và $x-2y = 3$ nên $(2y+3)y = 2 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 2 = 0$. Giải ra tìm được $y = -2$, từ đó $x = -1$.
- Trường hợp 2.** $x-2y-2xy+2 = x-2y-2 = -1$. Suy ra $xy = -2$ và $x-2y = 1$ nên $(2y+1)y = -2 \Leftrightarrow 2y^2 + y + 2 = 0$. Trường hợp này không có y thỏa mãn.

Vậy $(x, y) = (-1, -2)$ là cặp số nguyên duy nhất thỏa mãn bài toán. $\square$

2. Ta có

$$4(m^2 - mn + 4n^2) = (2m - n)^2 + 15n^2$$

nên từ giả thiết suy ra $(2n - m)^2 + 15n^2$ chia hết cho 5, từ đó $(2n - m)^2$ chia hết cho 5. Do 5 là số nguyên tố nên lại có $2n - m$ chia hết cho 5 và $(2n - m)^2$ chia hết cho 25.

Kết hợp đẳng thức ở trên lại có $15n^2$ chia hết cho 25 nên n^2 chia hết cho 5, do đó n chia hết cho 5. Suy ra m cũng chia hết cho 5.

Từ đó $m^2 + mn + 4n^2$ chia hết cho 25. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Câu 3.

- Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a^3b^3}{a^4 + b^4}$ là số nguyên dương không có ước nguyên tố vượt quá 3. Chứng minh rằng $a = b$.
- Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x + y + z).$$

- Gọi $d = (a, b)$ thì tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}$, $(x, y) = 1$ thỏa mãn $a = dx, b = dy$. Theo giả thiết, ta có

$$\frac{a^3b^3}{a^4 + b^4} = \frac{d^2x^3y^3}{x^4 + y^4} \in \mathbb{Z}^+. (1)$$

Chú ý là $(x^3y^3, x^4 + y^4) = 1$ nên từ $x^4 + y^4 \mid d^2x^3y^3$ ta suy ra $x^4 + y^4 \mid d^2$.

Khi đó, ta đặt $d^2 = k(x^4 + y^4)$ và thay vào (1) ta có

$$\frac{a^3b^3}{a^4 + b^4} = kx^3y^3.$$

Từ giả thiết ta có ngay k, x, y không có ước nguyên tố vượt quá 3. Ta xét các trường hợp sau.

★ Nếu $(k, x^4 + y^4) = 1$ thì $k, x^4 + y^4$ đều là các số chính phương nhưng $x^4 + y^4 \equiv 2 \pmod{5}$ nên loại trường hợp này.

★ Nếu $(k, x^4 + y^4) > 1$, ta giả sử k và $x^4 + y^4$ có ước nguyên tố là p thì $p \in \{2, 3\}$.

◇ Nếu $p = 3$ thì ta suy ra ngay $3 \mid x, y$ điều này mâu thuẫn vì $(x, y) = 1$.

◇ Nếu $p = 2$ thì vì $(x, y) = 1$ nên x, y phải cùng lẻ. Vì vai trò x, y bình đẳng nên ta chỉ cần xét $x = 1, y = 3^u$ với $u \in \mathbb{N}$. Viết $k = 2^s \cdot 3^t$ với $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, ta có

$$d^2 = 2^s \cdot 3^t (1 + 3^{4u})$$

Lưu ý rằng $1 + 3^{4u}$ không là số chính phương và $(2^s \cdot 3^t, 1 + 3^{4u}) = 2$.

Từ đây ta đặt $1 + 3^{4u} = 2m^2$ với m là số nguyên dương. Vì vế trái không chia hết cho 3 nên vế phải cũng không chia hết cho 3, kéo theo $2m^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Suy ra $3^{4u} \equiv 1 \pmod{3}$, do đó $u = 0$, tức là $y = 1$. Từ đây ta được $a = d = b$.

Vậy bài toán được chứng minh.

2. + Từ giả thiết có $1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) (xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq (y + z + x)^2.$$

+ Suy ra $Q \geq (x + y + z)^2 - 18(x + y + z) = (x + y + z - 9)^2 - 81 \geq -81$.

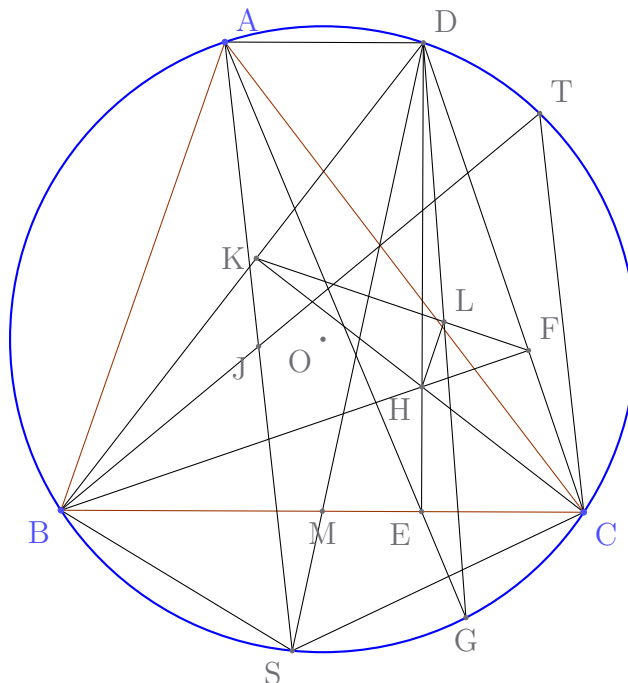
Khi $x = y = z = 3$ thì các giả thiết được thỏa mãn và $Q = -81$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng -81 . $\square$

Cách khác:

$$\begin{aligned} Q + 81 &\geq xy^2 - 18y + \frac{81}{x} + yz^2 - 18z + \frac{81}{y} + zx^2 - 18x + \frac{81}{z} \\ &= x \left(y - \frac{9}{x} \right)^2 + y \left(z - \frac{9}{y} \right)^2 + z \left(x - \frac{9}{z} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là D . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là S .

1. Chứng minh tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS .
2. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS . Đường thẳng BJ cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là T . Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS .
3. Các đường cao DE, BF và CK của tam giác BCD đồng quy tại H . Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng KF . Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .



1. Chú ý rằng $AD \parallel BC$ và các góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn (O)

Ta có:

$$\widehat{ACS} = \widehat{ADS} = \widehat{BMS} \text{ và } \widehat{SAC} = \widehat{SBC} \Rightarrow \triangle ASC \sim \triangle BMS \text{ (g.g)}$$

2. Từ $\triangle ACS \sim \triangle BMS \Rightarrow \triangle ABS \sim \triangle CMS$ (c.g.c)

Kết hợp với J, M lần lượt là trung điểm của AS, BC

Ta có:

$$AB \cdot CS = AS \cdot CM = 2AJ \cdot \frac{BC}{2} = AJ \cdot BC$$

Từ đó $\triangle ABJ \sim \triangle CBS$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABJ} = \widehat{CBS}$

Trong đường tròn (O), từ $\widehat{ABT} = \widehat{CBS}$, ta suy ra $AS \parallel CT$.

3. Hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $ABCD$ là hình thang cân.

Ta có tứ giác $BCFK$ nội tiếp nên

$$\widehat{CBF} = \widehat{CKF}, \widehat{DKF} = \widehat{DCB} = \widehat{ABC}$$

Từ $\triangle HBC \sim \triangle HKF$ (g.g), ta thu được $\frac{EB}{EC} = \frac{LK}{LF}$

Kết hợp với $\triangle ABC \sim \triangle DKF$ (g.g), ta thu được $\widehat{BAE} = \widehat{KDL}$.

Gọi G là giao điểm của các đường thẳng AE và DL

Do $\widehat{BAG} = \widehat{BDG}$ nên ta có tứ giác $ABGD$ nội tiếp.

Vậy các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại G thuộc (O). □

Câu 5. Dãy nhị phân là các dãy số chỉ bao gồm các số 0 và 1, ví dụ như các dãy 0100, 11000, 11. Mỗi lần ta được phép thực hiện một trong các thao tác sau:

1. Đổi 010 thành 1
2. Đổi 1 thành 010
3. Đổi 110 thành 0
4. Đổi 0 thành 110

Liệu ta có thể biến đổi được dãy $100 \dots 0$ gồm 2003 số 0 thành dãy $00 \dots 01$ gồm 2003 số 0 và một số 1 hay không? Tại sao?

Ta quy ước giá trị của mỗi số 0 trong một dãy nhị phân là +1 nếu số lượng số 1 nằm bên trái nó là số chẵn và là -1 nếu ngược lại. Đặt giá trị của một dãy nhị phân là tổng các giá trị của tất cả các số 0 trong dãy nhị phân đó nếu dãy nhị phân đó có chứa số 0 (nếu không ta sẽ không quy ước giá trị cho dãy đó).

Khi thực hiện thao tác (a) và (b), do không có số 1 nào được thêm vào hoặc xóa khỏi dãy nên giá trị của tất cả các số 0 trong dãy sau khi thực hiện thao tác sẽ không thay đổi. Vì ta thêm vào hoặc xóa đi một cặp số 0 mang hai giá trị đối lập nhau (1 số 0 có nhiều số 1 nằm bên trái hơn số 0 còn lại) nên giá trị của dãy nhị phân mới sẽ không thay đổi.

Khi thực hiện thao tác (c) và (d), do số lượng số 1 được thêm vào hoặc xóa khỏi dãy là 2 nên số lượng số 1 nằm bên trái mỗi số 0 trong dãy không thay đổi tính chẵn lẻ, hay giá trị của mỗi số 0 trong dãy sau khi thực hiện thao tác sẽ không thay đổi. Vì không có số 0 nào được thêm vào hay xóa khỏi dãy nên giá trị của dãy nhị phân mới cũng sẽ không thay đổi.

Như vậy thì giá trị của các dãy nhị phân có số 0 sẽ không bao giờ thay đổi khi ta thực hiện thao tác. Vì giá trị của 2 dãy $100\dots 0$ gồm 2003 số 0, một số 1 và dãy $00\dots 01$ gồm 2003 số 0 và một số 1 tương ứng là -2003 và $+2003$ nên không thể thu được dãy này qua dãy kia bằng cách thực hiện các thao tác trên. $\square$

ĐỀ 19

LỜI GIẢI

Câu 1.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$.

2) Cho $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ với $x \neq 0, x \neq -1$. Tính giá trị biểu thức:

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$$

1. Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$.

Ta có: $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m^2 - 2m - 8) = 9 > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta tìm được hai nghiệm của phương trình là $x = m - 4$ và $x = m + 2$.

Trường hợp 1: $x_1 = m - 4, x_2 = m + 2$, bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} m - 4 + 6 = \sqrt{m + 2} &\Leftrightarrow m + 2 = \sqrt{m + 2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ (m + 2)^2 = m + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m^2 + 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -2 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $x_1 = m + 2, x_2 = m - 4$, bài toán trở thành:

$$\begin{aligned} m + 2 + 6 = \sqrt{m - 4} &\Leftrightarrow m + 8 = \sqrt{m - 4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8 \geq 0 \\ m - 4 \geq 0 \\ (m + 8)^2 = m - 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -8 \\ m \geq 4 \\ m^2 + 15m + 68 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -8 \\ m \geq 4 \\ m \in \emptyset \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Vậy $m = -1, m = -2$ thỏa mãn là các giá trị phải tìm. □

2. Ta có: $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ với $x > 0$.

Thật vậy, khi $x > 0$, hai vế của đẳng thức đều dương nên bình phương hai vế của đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x(x+1)} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - 2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Áp dụng ta được:

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; f(2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; f(3) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots; f(2023) = 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024};$$

$$\text{Vậy } f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023) = 2024 - \frac{1}{2024} = \frac{2024^2 - 1}{2024}. \quad \square$$

Câu 2. Cho số nguyên dương n có tất cả k ước số dương là $d_1 < d_2 < \dots < d_k$. Giả sử

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k + k = 2n + 1$$

Chứng minh rằng $2n$ là một số chính phương.

Gọi $l_1, l_2, \dots, l_s$ là các ước lẻ của n và 2^m là lũy thừa lớn nhất của 2 trong khai triển n . Các ước của n là

$$l_1, l_2, \dots, l_s, 2l_1, 2l_2, \dots, 2l_s, \dots, 2^m l_1, 2^m l_2, \dots, 2^m l_s$$

Đẳng thức ở đề bài trở thành

$$l_1 + l_2 + \dots + l_s + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_s + \dots + 2^m l_1 + 2^m l_2 + \dots + 2^m l_s + (m+1)s = 2n + 1$$

Đưa các nhân tử $l_1 + l_2 + \dots + l_s$ về một nhóm, đẳng thức trên tương đương

$$(l_1 + l_2 + \dots + l_s)(2^{m+1} + (m+1)s) = 2n + 1 \quad (*)$$

Tới đây, ta xét các trường hợp sau đây.

- Nếu s chẵn thì vế trái của $(*)$ chẵn, còn vế phải của $(*)$ lẻ, mâu thuẫn.
- Nếu s lẻ và m chẵn thì vế trái của $(*)$ cũng chẵn, còn vế phải của $(*)$ lẻ, mâu thuẫn.
- Nếu s lẻ và m lẻ, $\frac{n}{2^m} = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ có số ước là

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1).$$

Theo đó, các k_i là số chẵn và $2^{m+1} \cdot \frac{n}{2^m} = 2n$ là số chính phương.

Như vậy, bài toán được chứng minh. □

Câu 3.

1) Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x + y + z + 11)$$

2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$ và $2a + 3b + 4c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a(3b + 4c - 2)} + \frac{9}{b(4a + 8c - 3)} + \frac{8}{c(2a + 3b - 1)}$$

1. Điều kiện $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + 4\sqrt{y-1} + 6\sqrt{z-2} &= x + y + z + 11 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 2)^2 + (\sqrt{z-2} - 3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \sqrt{y-1} - 2 = \sqrt{z-2} - 3 &= 0 \Leftrightarrow x = 1, y = 5, z = 11 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y, z) = (1, 5, 11)$. $\square$

2. Để ý thấy mẫu số có sự liên quan đến giả thuyết.

Do đó ta có các biến đổi sau với $2a + 3b + 4c = 3$:

$$a(3b + 4c - 2) = a(3 - 2a - 2) = a(1 - 2a)$$

$$b(4a + 8c - 3) = b(6 - 6b - 3) = 3b(1 - 2b)$$

$$c(2a + 3b - 1) = c(3 - 4c - 1) = 2c(1 - 2c)$$

$$\text{Do đó } P = \frac{2}{a(1-2a)} + \frac{3}{b(1-2b)} + \frac{4}{c(1-2c)} = \frac{2a}{a^2(1-2a)} + \frac{3b}{b^2(1-2b)} + \frac{4c}{c^2(1-2c)}$$

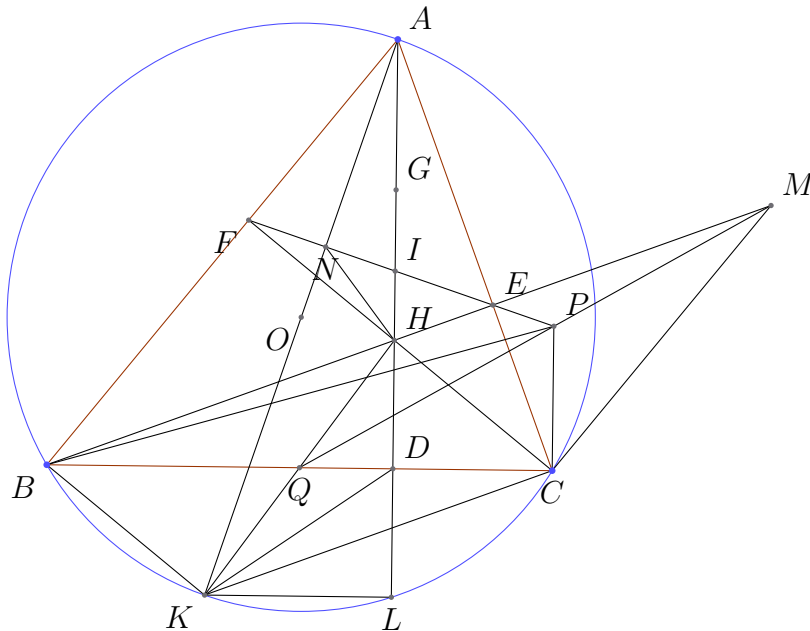
Áp dụng Cauchy 3 số (dạng $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$) ta có:

$$P \geq \frac{2a}{\frac{1}{27}} + \frac{3b}{\frac{1}{27}} + \frac{4c}{\frac{1}{27}} \geq 27(2a + 3b + 4c) = 81 \text{ (đpcm)}$$

Dấu = xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ $\square$

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N .

- 1) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD} = \widehat{AHN}$.
- 2) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M . Gọi Q là giao điểm của BC và HK , đường thẳng EF cắt QM tại P . Chứng minh $\triangle BPC$ vuông.



1. Vì AK là đường kính nên $\angle ACK = \angle ABK = 90^\circ$.

Ta chứng minh được: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$.

$$\text{Suy ra } \angle OAC + \angle AEF = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} + \angle AEF = \frac{180^\circ - 2\angle ABC}{2} + \angle ABC = 90^\circ.$$

Suy ra AK vuông góc với EF . Như vậy $\angle KNF = 90^\circ = \angle ABK$.

Từ đó suy ra được tứ giác $BFNK$ nội tiếp.

Khi đó chứng minh được $\triangle ANF \sim \triangle ABK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AK} \Leftrightarrow AN.AK = AB.AF$.

Và $\triangle AFH \sim \triangle ADB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AD.AH = AB.AF = AN.AK$.

Suy ra $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AK}$, $\angle DAK$ chung suy ra $\triangle AHN \sim \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHN = \angle AKD$.

2. Gọi G là trung điểm của AH .

Ta chú ý $BHCK$ là hình bình hành nên BC, HK cắt nhau tại trung điểm, tức là Q là trung điểm BC . Gọi I là giao của AH và EF .

Ta chú ý hai tam giác $\triangle MBC \sim \triangle CAH$ do các cặp cạnh tương ứng vuông góc với nhau. (1)

Gọi L là giao của AD với (O) . Ta có tứ giác $NILK$ nội tiếp. Và chứng minh được:

$$AB.AF = AN.AK = AI.AL \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AL}{AF}$$

Kết hợp với góc BAL chung suy ra $\triangle BIA \sim \triangle LFA \Rightarrow \angle ABI = \angle ALF$. (2)

Mà DQ song song LK do cùng vuông với AL nên D là trung điểm của HL . Ta có:

$$\begin{aligned} HF.HC &= HA.HD = 2HG.HD = HG.HL \\ \Rightarrow \frac{HF}{HL} &= \frac{HG}{HC}, \angle FHL = \angle GHC \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle FHL \sim \triangle GHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle FLH = \angle GCH$.

Kết hợp với (2) thì $\angle ABI = \angle FLH = \angle GCH$. Ta có biến đổi góc sau:

$$\angle IBE = \angle ABE - \angle ABI = \angle ACH - \angle GCH = \angle ACG = \angle BMQ \text{ (do (1))}$$

Do đó BI song song với MP . Theo định lý Thales ta có:

$$\frac{EI}{EP} = \frac{EB}{EM} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow AI \parallel CP \Rightarrow \angle PCB = 90^\circ.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Câu 5. Xét một nhóm n người với n nguyên dương và $n \leq 475$. Hai người bất kì trong nhóm quen nhau hoặc không quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương $m \geq 10$ sao cho có thể chia nhóm này thành m nhóm nhỏ phân biệt, đánh số từ 1 đến m sao cho mỗi người ở nhóm i quen với đúng j người ở nhóm j với mọi i, j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$. Tính giá trị lớn nhất có thể có của n .

Nếu gọi $a_1, a_2, \dots, a_m$ lần lượt là số học sinh của lớp 1, 2, ..., m thì ta có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$$

Với 2 nhóm thứ i và j phân biệt thuộc $\{1, 2, \dots, m\}$, ta thực hiện đếm số bộ (a, b) với a thuộc nhóm i và b thuộc nhóm j . Dễ dàng có được $ia_j = ja_i$ hay là $\frac{a_i}{i} = \frac{a_j}{j}$. Từ đó ta suy ra

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \dots = \frac{a_m}{m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{1 + 2 + \dots + m} = \frac{n}{m(m+1)}$$

Chú ý rằng vì $m \geq 10$ nên $\frac{m(m+1)}{2} \geq 55$. Do n chia hết cho số có dạng $\frac{m(m+1)}{2}$ và $n \leq 475$ nên kiểm tra trực tiếp, ta thấy giá trị lớn nhất của n là 468, với $m = 12$. □

ĐỀ 20

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $3a^2 + 5ab - 2b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3a - 2b}{2a + b}$.
2. Cho đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số nguyên. Biết $Q(x)$ có một nghiệm là $x_0 = \sqrt{3}$ và $Q(1) = 4$, tính giá trị $Q(-2)$.

1.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 5ab - 2b^2 &= 0 \\ 3a^2 + 6ab - ab - 2b^2 &= 0 \\ 3a(a + 2b) - b(a + 2b) &= 0 \\ (3a - b)(a + 2b) &= 0 \end{aligned}$$

$$3a = b \quad \text{hoặc} \quad a + 2b = 0 \quad (\text{vô lý do } a, b \text{ đều dương - giả thiết})$$

$$\text{Thay } b = 3a \text{ vào } P \text{ có: } P = \frac{3a - 2 \cdot 3a}{2a + 3a} = \frac{-3a}{5a} = \frac{-3}{5}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-3}{5}$$

□

2. Thay $x = \sqrt{3}$ vào $Q(x)$ có:

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + a(\sqrt{3})^2 + b\sqrt{3} + c \\ 0 &= 3\sqrt{3} + 3a + b\sqrt{3} + c \\ 0 &= \sqrt{3}(3 + b) + 3a + c \\ -(3a + c) &= \sqrt{3}(3 + b) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } b + 3 \neq 0 \implies \sqrt{3} = \frac{-(3a + c)}{3 + b},$$

$$\text{mà } a, b, c \in \mathbb{Z} \implies \frac{-(3a + c)}{3 + b} \in \mathbb{Q}, \text{ kết hợp } \sqrt{3} \in \mathbb{I} \text{ nên giả thiết trên vô lý.}$$

$$\implies 3 + b = 0 \implies b = -3$$

$$\implies 3a + c = 0 \implies c = -3a$$

$$\implies Q(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 3a$$

Do $Q(1) = 4$ nên thay $x = 1$ có:

$$\begin{aligned} 4 &= 1^3 + a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 3a \\ 4 &= -2 - 2a \\ 6 &= -2a \end{aligned}$$

$$\implies a = -3 \implies c = -3(-3) = 9$$

$$\implies Q(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$$

$$\text{Thay } x = -2 \text{ có: } Q(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 3(-2) + 9 = -8 - 3 \cdot 4 + 6 + 9 = -5$$

$$\text{Vậy } Q(-2) = -5$$

□

Câu 2.

- Một công ty X áp dụng chính sách trả lương cho nhân viên theo hai mức: ngày làm việc bình thường và ngày làm việc đặc biệt (làm vào ngày được nghỉ), biết rằng tiền lương của một ngày làm việc đặc biệt nhiều hơn tiền lương của một ngày làm việc bình thường là 225 nghìn đồng. Trong một tháng, anh Bình là nhân viên của công ty X làm việc 24 ngày, trong đó có một số ngày làm việc đặc biệt. Bình nhận được 9 triệu đồng cho những ngày làm việc bình thường và 2,7 triệu đồng cho những ngày làm việc đặc biệt. Hỏi anh Bình được nhận bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi ngày làm việc đặc biệt?

- Giải phương trình:

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{9-x}{\sqrt[3]{8x-16}}$$

1. Gọi số tiền anh Bình nhận được cho mỗi ngày làm việc đặc biệt là x (nghìn đồng), ($x > 225$). Vậy nên tiền lương một ngày bình thường của anh Bình là $x - 225$ (nghìn đồng).

Từ đó, ta có:

- Số ngày làm việc đặc biệt của anh Bình là $\frac{2700}{x}$ (ngày)
- Số ngày làm việc bình thường của anh Bình là $\frac{9000}{x-225}$ (ngày)

Do anh làm tổng 24 ngày nên ta có phương trình sau:

$$\begin{aligned} \frac{2700}{x} + \frac{9000}{x-225} &= 24 \\ \Leftrightarrow \frac{2700(x-225) + 9000x}{x(x-225)} &= 24 \\ \Leftrightarrow 11700x - 607500 &= 24x(x-225) \\ \Leftrightarrow 11700x - 607500 &= 24x^2 - 5400x \\ \Leftrightarrow 24x^2 - 17100x + 607500 &= 0 \\ \Leftrightarrow 12(x-675)(2x-75) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-675=0 \\ 2x-75=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=675 \text{ (t/m)} \\ x=\frac{75}{2} \text{ (ktm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số tiền anh Bình nhận được cho một ngày làm việc đặc biệt là 675 nghìn đồng. □

2. ĐKXD: $\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 8x-16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Cách 1. Đặt $a = \sqrt{2x-2}$, $b = \sqrt[3]{x-2}$ (với $a \geq 0$, $b \neq 0$) ta có $a^2 = 2x-2 = 2(x-2) + 2 = 2b^3 + 2$, nên $a^2 = 2b^3 + 2$. (1)

Biến đổi PT đã cho thành:

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt[3]{x-2} = \frac{16-(2x-2)}{4\sqrt[3]{x-2}}$$

$$\text{hay } a+b = \frac{16-a^2}{4b} \Leftrightarrow (a+2b)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-2b \\ a=-4-2b \end{cases}$$

Nếu $a = -4 - 2b$ thì do $a \geq 0$ nên $b \leq -2$; từ (1) ta lại có $2b^3 = a^2 - 2 \geq -2 \Rightarrow b \geq -1$ (mâu thuẫn).

Vậy $a = 4 - 2b$. Thay vào (1) ta được:

$$(4 - 2b)^2 = 2b^3 + 2 \Leftrightarrow (b - 1)(b^2 - b + 7) = 0. \quad (2)$$

Vì $b^2 - b + 7 = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ nên từ (2) suy ra $b = 1$, do đó $a = 4 - 2b = 2$.

Từ đó tìm được $x = 3$ (thỏa mãn).

Cách 2. Với $x = 3$ thì:

$$VT = \sqrt{3 \cdot 2 - 2} + \sqrt[3]{3 - 2} = 2 + 1 = 3;$$

$$VP = \frac{9 - 3}{\sqrt[3]{8 \cdot 3 - 16}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Nhận thấy $VT = VP$, nên $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

• Xét $x > 3$ thì:

$$\sqrt{2x - 2} > \sqrt{2 \cdot 3 - 2} = 2; \quad \sqrt[3]{x - 2} > \sqrt[3]{3 - 2} = 1;$$

$$9 - x < 9 - 3 = 6; \quad 0 < \frac{1}{\sqrt[3]{8x - 16}} < \frac{1}{\sqrt[3]{8 \cdot 3 - 16}} = \frac{1}{2}$$

nên $VT > 2 + 1 = 3$ và $VP < \frac{6}{2} = 3$. Do đó $VT > VP$.

• Xét $2 < x < 3$ thì $\sqrt{2x - 2} < 2$; $\sqrt[3]{x - 2} < 1 \Rightarrow VT < 3$;

$$9 - x > 6; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{8x - 16}} > \frac{1}{2} \Rightarrow VP > 3. \text{ Do đó } VT < VP.$$

• Xét $1 \leq x < 2$ thì $\sqrt{2x - 2} \geq 0$; $\sqrt[3]{x - 2} \geq -1$ nên $VT > -1$;

$$9 - x > 7; \quad -2 \leq \sqrt[3]{8x - 16} < 0 \Rightarrow 0 < -\sqrt[3]{8x - 16} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{-\sqrt[3]{8x - 16}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{9 - x}{-\sqrt[3]{8x - 16}} > \frac{7}{2} \Rightarrow VP = \frac{9 - x}{\sqrt[3]{8x - 16}} < -\frac{7}{2} < -1. \text{ Do đó } VT > VP.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$. □

Câu 3.

1. Cho tập hợp $S = \{1; 2; \dots; 20\}$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử của tập hợp S . Tính xác suất để chọn được hai phần tử mà tích hai phần tử đó chia hết cho 6.

2. Tìm tất cả bộ ba số nguyên không âm (m, n, k) thỏa mãn điều kiện:

$$k^2 - k + 4 = 5^m(2 + 10^n)$$

1. Gọi D là biến cố chọn được hai phần tử có tích chia hết cho 6. Ta đếm số cách chọn ra hai phần tử mà tích của chúng chia hết cho 6. Có ba khả năng:

- Cả hai phần tử chia hết cho 6: vì có 3 số chia hết cho 6 nên có $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ cách chọn hai phần tử đều chia hết cho 6.
- Có đúng một phần tử chia hết cho 6: có 3 cách chọn ra một phần tử chia hết cho 6 và có 17 cách chọn ra phần tử còn lại không chia hết cho 6. Do đó trong trường hợp này có $3 \cdot 17 = 51$ cách chọn.

- Cả hai phần tử đều không chia hết cho 6 (phải loại đi các phần tử 6, 12, 18): thế thì phải có một phần tử chia hết cho 2 (có 7 cách chọn) và một phần tử chia hết cho 3 (có 3 cách chọn). Do đó trong trường hợp này có $7 \cdot 3 = 21$ cách chọn.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố D là $3 + 51 + 21 = 75$.

Xác suất của biến cố D là $\frac{75}{190} = \frac{15}{38}$. □

2. Với $n = 0, n = 1$, Kiểm tra, ta tìm ra $m = 1, k = 8$ khi $n = 1$.
Với $n \geq 2$, ta xét các trường hợp sau.

- Với $m = 0$, phương trình ban đầu trở thành:

$$k^2 - k + 4 = 2 + 10^n \Leftrightarrow 4k^2 - 4k + 16 = 8 + 4 \cdot 10^n \Leftrightarrow (2k - 1)^2 + 7 = 4 \cdot 10^n.$$

Do $n \geq 1$ nên khi lấy đồng dư theo modulo 5 hai vế, ta được:

$$(2k - 1)^2 \equiv 4 \cdot 10^n - 7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{5}.$$

Ta được điều mâu thuẫn ở đây.

- Với $m \geq 1$, khi đó 5 sẽ là ước của $k^2 - k + 4 = (k - 3)(k + 2) + 10$.
Như vậy, $(k - 3)(k + 2)$ sẽ chia hết cho 5. Mặt khác ta lại có $5 \mid (k + 2) - (k - 3) = 5$, nên đồng thời cả $k + 2$ và $k - 3$ sẽ chia hết cho 5 và $k^2 - k + 4$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25. Đến đây, ta chỉ ra $m = 1$, lúc này phương trình đã cho trở thành:

$$k^2 - k + 4 = 5(2 + 10^n) \Leftrightarrow (2k - 1)^2 = 25 + 20 \cdot 10^n.$$

Dễ thấy $2k - 1$ có tận cùng là 5. Đặt $2k - 1 = 10q + 5$, ta có:

$$20 \cdot 10^n + 25 = (10q + 5)^2 \Leftrightarrow q(q + 1) = 2^n \cdot 5^{n-1}.$$

Do $(q, q + 1) = (2^n, 5^{n-1}) = 1$ và $q < q + 1, 2^n < 5^{n-1}$ nên ta xét các trường hợp sau:

- * **Trường hợp 1.** Nếu $q = 1$ và $q + 1 = 2^n \cdot 5^{n-1}$ thì $n = 1$, trái điều kiện $n \geq 2$ đang xét.
- * **Trường hợp 2.** Nếu $q = 2^n$ và $q + 1 = 5^{n-1}$ thì $2^n + 1 = 5^{n-1}$.
Ta tìm ra $n = 2, q = 4, k = 23$.

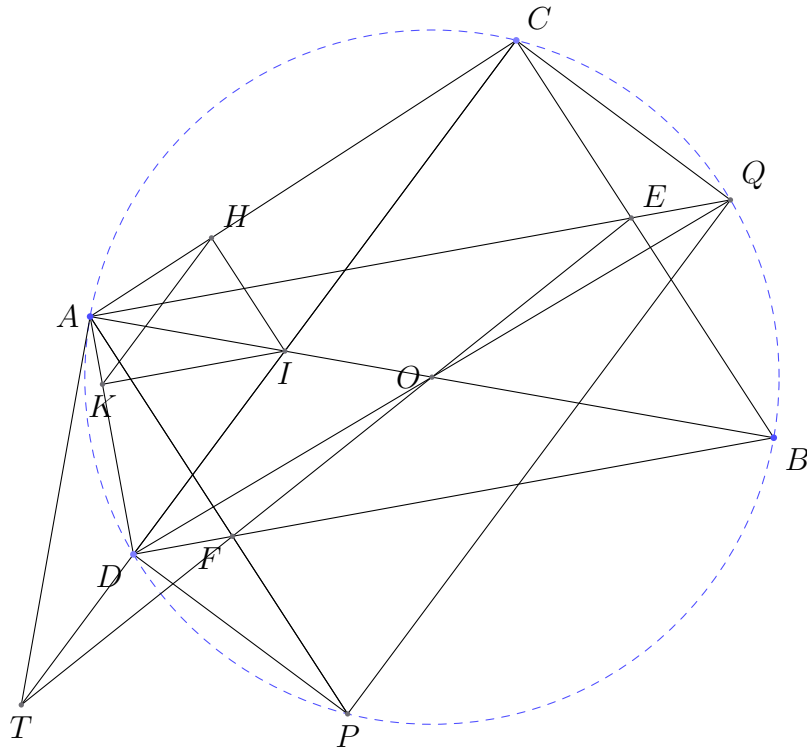
Vậy các bộ số thỏa mãn là $(m, n, k) = (1, 1, 8), (1, 2, 23)$. □

Câu 4. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Xét dây cung CD không đi qua O , không vuông góc với AB và CD cắt AB tại I . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AC và AD .

1. Chứng minh hai tam giác IHK và BCD đồng dạng.
2. Chứng minh $S_{\triangle ACD} > 4S_{\triangle HIK}$.
3. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt CD tại T . Hai đường thẳng BC và BD cắt tia TO lần lượt tại E và F , AF cắt (O) tại P , AE cắt (O) tại Q . Chứng minh tứ giác $CDPQ$ là hình chữ nhật.

1. Do K, H là hình chiếu của I lên AD và AC nên $\widehat{IHA} = \widehat{IKA} = 90^\circ$ mà $\widehat{ADB} = 90^\circ = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $IH \parallel BC$ (cùng $\perp AC$), $IK \parallel BD$ (cùng $\perp AD$) $\implies \widehat{KIH} = \widehat{DBC}$.



Theo hệ quả định lý Thales, ta chứng minh được:

$$\frac{IK}{BD} = \frac{AI}{AB} = \frac{IH}{CB}$$

nên $\triangle IHK \sim \triangle BCD$ (c-g-c).

2. Có: $\frac{S_{AID}}{S_{BID}} = \frac{AI}{IB}$ (2 tam giác chung đường cao).

Tương tự: $\frac{S_{AIC}}{S_{BIC}} = \frac{AI}{IB}$.

$$\Rightarrow \frac{S_{AID}}{S_{BID}} = \frac{S_{AIC}}{S_{BIC}} = \frac{AI}{IB}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{S_{AID} + S_{AIC}}{S_{BID} + S_{BIC}} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$$

Theo chứng minh trên: $\triangle IHK \sim \triangle BCD$ nên $\frac{S_{IHK}}{S_{BCD}} = \left(\frac{KH}{CD}\right)^2 = \left(\frac{AH}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AI}{AB}\right)^2$.

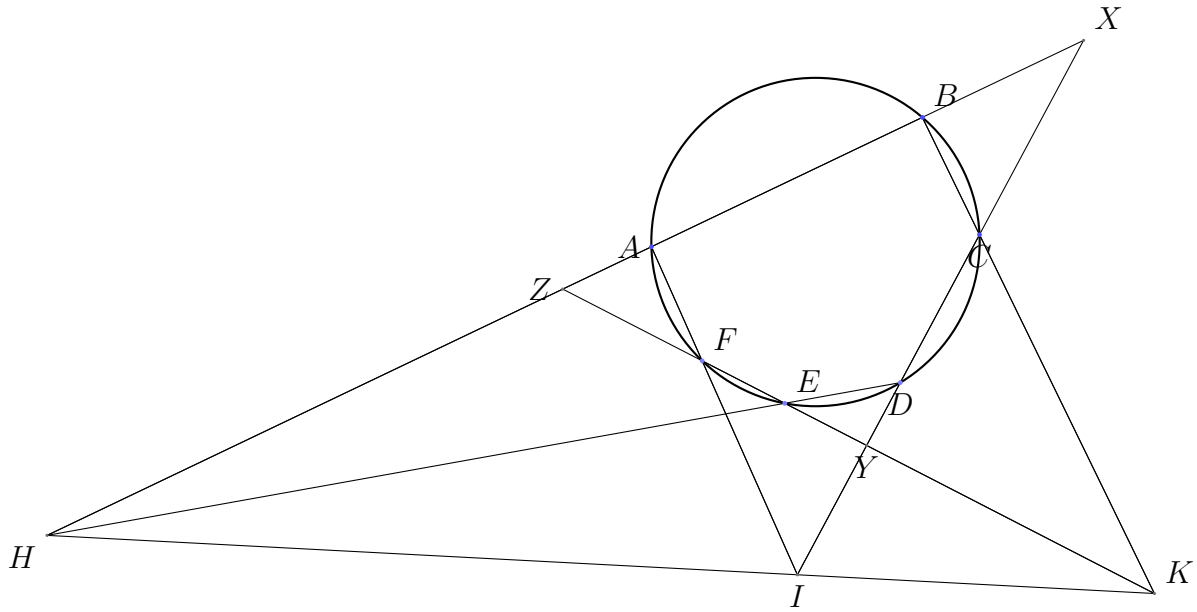
$$\text{Suy ra } \frac{S_{ACD}}{S_{IHK}} = \frac{\frac{AI}{IB}}{\frac{AI^2}{AB^2}} = \frac{AB^2}{IB \cdot IA} = \frac{(IA + IB)^2}{IA \cdot IB} \geq \frac{4IB \cdot IA}{IB \cdot IA} = 4 \text{ (theo bất đẳng thức AM-GM).}$$

Suy ra $S_{ACD} \geq 4S_{IHK}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$, tức là I là trung điểm $AB \Rightarrow I \equiv O$ (vô lý vì CD không qua O).

Vậy $S_{ACD} > 4S_{IHK}$.

3. Bổ đề (Định lý Pascal): Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn, H, K, I lần lượt là giao điểm của AB và ED , BC và EF , AF và CD . Chứng minh rằng I, H, K thẳng hàng.



Chứng minh:

Gọi X là giao điểm của AB, CD , Y là giao điểm của EF và CD , Z là giao điểm của AB và EF .

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔXYZ với cát tuyến IFA ta được:

$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{AX}{AZ} \cdot \frac{FZ}{FY} = 1 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔXYZ cát tuyến HED ta được:

$$\frac{HX}{HZ} \cdot \frac{EZ}{EY} \cdot \frac{DY}{DX} = 1 \quad (2)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho ΔXYZ cát tuyến KBC ta được:

$$\frac{KZ}{KY} \cdot \frac{CY}{CX} \cdot \frac{BX}{BZ} = 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) nhân theo vế ta được:

$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{HX}{HZ} \cdot \frac{KZ}{KY} \cdot \frac{XA}{XC} \cdot \frac{XB}{XD} \cdot \frac{ZE}{ZA} \cdot \frac{ZF}{ZB} \cdot \frac{YC}{YE} \cdot \frac{YD}{YF} = 1$$

Chú ý $XA.XB = XC.XD, ZE.ZF = ZA.ZB, YC.YD = YE.YF$ từ đó ta được:

$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{HX}{HZ} \cdot \frac{KZ}{KY} = 1$$

Áp dụng định lý Menelaus đảo cho ΔXYZ ta được H, I, K thẳng hàng (đpcm).

Trở lại bài toán:

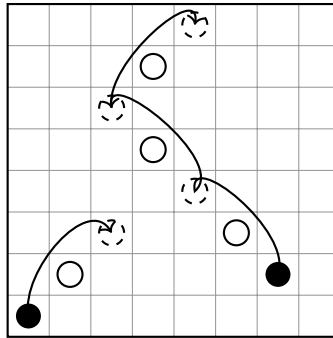
Kẻ đường kính DQ' của (O) , gọi E' là giao của AQ' với CB .

Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} A & B & D \\ C & Q' & A \end{pmatrix}$ với $AQ' \cap BC = E', AA \cap DC = T, BA \cap Q'D = O$.

Do đó T, O, E' thẳng hàng hay $E \equiv E'$ vậy nên DQ là đường kính của (O) .

Hoàn toàn tương tự CP cũng là đường kính của (O) do đó $DCQP$ là hình chữ nhật. $\square$

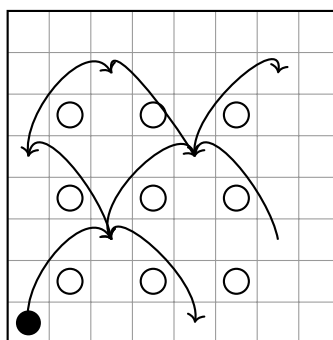
Câu 5. Trong một lưới vuông 8×8 , người chơi có thể di chuyển quân cờ đen nhảy qua một quân cờ trắng theo đường chéo vào một ô trống liền kề để ăn quân cờ đó như hình dưới đây.



Một lượt chơi, người chơi có thể ăn nhiều các quân cờ trắng bằng những bước nhảy liên tiếp, mỗi bước ăn một quân cờ. Hỏi có tối đa bao nhiêu quân cờ trắng mà người chơi có thể ăn trong một lượt chơi?

Đầu tiên chúng ta sẽ tô lưới vuông theo cách tô của bàn cờ vua. Khi ấy để ý rằng cách di chuyển quân cờ đen theo đường chéo – như cách di chuyển của quân tinh trong bàn cờ vua, chúng ta có thể khẳng định rằng một quân cờ đen xuất phát ở ô màu nào thì sẽ luôn ở trong ô màu đó. Đồng thời các quân cờ đen ăn được cũng phải ở trong những ô cùng màu đó. Không mất tính tổng quát, giả sử quân cờ đen xuất phát ở màu trắng. Khi đó chúng ta đánh dấu các ô trắng theo quy luật dưới đây:

1		1		1		1	
	2		2		2		2
1		1		1		1	
	2		2		2		2
1		1		1		1	
	2		2		2		2
1		1		1		1	
	2		2		2		2



Vì các ô đánh số 1 và các ô đánh số 2 tương đương nhau nên chúng ta giả sử thêm rằng quân cờ đen xuất phát tại một ô đánh số 1. Để ý thêm rằng sau mỗi lượt nhảy, quân cờ đen luôn dừng lại ở ô đánh số 1, tương ứng với việc người chơi chỉ có thể ăn được các quân cờ ở ô đánh số 2. Hơn nữa dễ thấy rằng không có cách nào để ăn được những quân cờ ở các ô đánh số 2 cạnh bàn cờ. Vì vậy số quân cờ tối đa mà người chơi có thể ăn trong một lượt là những quân cờ trong các ô đánh số 2 còn lại (là 9 ô). Người chơi có thể di chuyển và ăn 9 quân cờ như ví dụ ở trên. $\square$

Bình luận. Ví dụ trên thuộc dạng toán về tối ưu hóa trong lưới vuông, nó được giải quyết chủ yếu dựa vào tính bất biến trong cách di chuyển của quân cờ đen. Trong ví dụ dưới đây, kĩ thuật sử dụng yếu tố bất biến lại được sử dụng để giải quyết bài toán.

ĐỀ 21

LỜI GIẢI

Câu 1.

- 1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{3}{2}$, tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{x^2 - y^2}{(x+z)(y+z)} + \frac{y^2 - z^2}{(y+x)(z+x)} + \frac{z^2 - x^2}{(z+y)(x+y)}$$

- 2) Một con Robot di chuyển trên một đường thẳng, nó được lập trình di chuyển tự động như sau: Ở vị trí xuất phát, khi có hiệu lệnh, Robot sẽ bước 8 bước, mỗi bước nó sẽ ngẫu nhiên tiến về phía trước 1 m hoặc lùi về phía sau 1 m với xác suất như nhau. Sau đó Robot dừng lại. Gọi A là biến cố: “Khi Robot dừng lại nó cách vị trí xuất phát xa hơn 4 m”. Xác suất của biến cố A bằng $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$), biết $\frac{a}{b}$ là một phân số tối giản. Tính $a + b$.

1. Ta biến đổi

$$\frac{x^2 - y^2}{(x+z)(y+z)} = \frac{x-y}{y+z} \cdot \frac{x+y}{x+z} = \left(\frac{x+z}{y+z} - 1 \right) \frac{x+y}{x+z} = \frac{x+y}{y+z} - \frac{x+y}{x+z}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\begin{cases} \frac{y^2 - z^2}{(y+x)(z+x)} = \frac{y+z}{x+z} - \frac{y+z}{y+x} \\ \frac{z^2 - x^2}{(z+y)(x+y)} = \frac{z+x}{x+y} - \frac{z+x}{z+y} \end{cases}$$

Nên

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - y^2}{(x+z)(y+z)} + \frac{y^2 - z^2}{(y+x)(z+x)} + \frac{z^2 - x^2}{(z+y)(x+y)} \\ &= \frac{x+y}{y+z} - \frac{x+y}{x+z} + \frac{y+z}{x+z} - \frac{y+z}{y+x} + \frac{z+x}{x+y} - \frac{z+x}{z+y} \\ &= \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} + \frac{x-y}{x+y} \\ &= \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y} \right) - \left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{x+y} \right) \\ &= 2 \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+y} \right) - 3 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $A = 0$. □

2. Gọi x là số bước Robot tiến về phía trước trong tổng số 8 bước di chuyển ($0 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N}$). Khi đó, số bước Robot lùi về phía sau là $8 - x$.

Vị trí của Robot lúc dừng lại cách vị trí xuất phát một khoảng là:

$$|x - (8 - x)| = |2x - 8| \text{ (m)}.$$

Biến cố A : “Khi Robot dừng lại nó cách vị trí xuất phát xa hơn 4 m” xảy ra khi và chỉ khi:

$$|2x - 8| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8 > 4 \\ 2x - 8 < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x < 2 \end{cases}$$

Do $0 \leq x \leq 8$ và $x \in \mathbb{N}$ nên ta tìm được các giá trị thỏa mãn của x là: $x \in \{0; 1; 7; 8\}$. Số phần tử của không gian mẫu (tổng số trạng thái bước đi có thể xảy ra) là:

$$|\Omega| = 2^8 = 256.$$

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$|\Omega_A| = C_8^0 + C_8^1 + C_8^7 + C_8^8 = 1 + 8 + 8 + 1 = 18.$$

Xác suất của biến cố A bằng:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{18}{256} = \frac{9}{128}.$$

Vì $\frac{9}{128}$ là phân số tối giản nên ta có $a = 9$ và $b = 128$ (thỏa mãn $a, b \in \mathbb{N}^*$).

Vậy giá trị của biểu thức cần tính là: $a + b = 9 + 128 = 137$. □

Câu 2.

- Tìm tất cả các bộ số (a, b, c) là ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a^2 - 3a + b + c$, $b^2 - 3b + c + a$, $c^2 - 3c + a + b$ đều là các số chính phương.
- Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn trong các số:

$$x - \sqrt{2}, \quad x^2 + 2\sqrt{2}, \quad x + \frac{1}{x}, \quad x - \frac{1}{x}$$

có đúng một số không nguyên.

- Theo bất đẳng thức tam giác, $b + c > a$ và do a, b, c nguyên nên $b + c \geq a + 1$. Ta có

$$a^2 - 3a + b + c \geq a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Giả sử này cho ta

$$(a - 1)^2 \leq a^2 - 3a + b + c \leq a^2 - a < a^2,$$

và như vậy, $a^2 - 3a + b + c$ chỉ có thể là số chính phương nếu $b + c = a + 1$.

Tiếp theo, ta cũng có $b^2 - 3b + c + a = (b - 1)^2 + 2(c - 1)$ là số chính phương, thế nhưng do

$$(b - 1)^2 \leq (b - 1)^2 + 2(c - 1) < b^2 - 1 < b^2$$

nên rõ ràng $c = 1$. Kết hợp với đẳng thức $b + c = a + 1$, ta chỉ ra $a = b$.

Cuối cùng, ta có $c^2 - 3c + a + b = 2(a - 1)$ là số chính phương, nên tồn tại số tự nhiên m sao cho $a = 2m^2 + 1$. Kiểm tra trực tiếp các bộ số $(2m^2 + 1, 2m^2 + 1, 1)$, ta thấy chúng đều thỏa mãn đề bài. Đây chính là kết quả bài toán. □

- Không thể xảy ra trường hợp cả $x + \frac{1}{x}$ và $x - \frac{1}{x}$ đều là số nguyên, bởi vì khi đó

$$x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2x$$

là số hữu tỷ và x hữu tỷ, vô lí. Như vậy, một trong hai số

$$x + \frac{1}{x}, \quad x - \frac{1}{x}$$

phải không nguyên, đồng thời cả hai số $x - \sqrt{2}$ và $x^2 + 2\sqrt{2}$ đều nguyên.

Do $x - \sqrt{2}$ nguyên nên ta có thể đặt $x - \sqrt{2} = a$, với a là số nguyên. Khi đó vì

$$x^2 + 2\sqrt{2} = (a + \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = a^2 + 2 + 2\sqrt{2}(a + 1)$$

là số nguyên nên $a = -1$. Ta cần thử lại. Với $x = -1 + \sqrt{2}$, ta có

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= -1 + \sqrt{2} + \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}, \\ x - \frac{1}{x} &= -1 + \sqrt{2} - \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = -2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Như vậy, số thực x thỏa mãn là $x = -1 + \sqrt{2}$. □

Câu 3.

1. Cho đa thức $f(x)$ có hệ số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{12}$$

1. Giả sử phản chứng rằng tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c thỏa mãn:

$$f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = a$$

Do $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, nên với hai số nguyên phân biệt x, y bất kỳ, ta luôn có tính chất:

$$(x - y) \mid (f(x) - f(y))$$

Áp dụng tính chất này lần lượt cho ba cặp số (a, b) , (b, c) và (c, a) , ta thu được:

$$\begin{aligned} (a - b) \mid (f(a) - f(b)) &\implies (a - b) \mid (b - c) \\ (b - c) \mid (f(b) - f(c)) &\implies (b - c) \mid (c - a) \\ (c - a) \mid (f(c) - f(a)) &\implies (c - a) \mid (a - b) \end{aligned}$$

Vì a, b, c là ba số nguyên phân biệt nên các hiệu $a - b, b - c, c - a$ đều là các số nguyên khác 0. Từ các mối quan hệ chia hết trên, ta suy ra:

$$|a - b| \leq |b - c| \leq |c - a| \leq |a - b|$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$|a - b| = |b - c| = |c - a| = k \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}^+)$$

Đặt $d_1 = a - b, d_2 = b - c, d_3 = c - a$. Khi đó ta có $|d_1| = |d_2| = |d_3| = k > 0$.

Xét

$$d_1 + d_2 + d_3 = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$$

Tuy nhiên, vì mỗi d_i chỉ có thể nhận giá trị là k hoặc $-k$, tổng của ba số có cùng trị tuyệt đối $k \neq 0$ không thể bằng 0 (vì tổng của một số lẻ các số hạng $\pm k$ luôn có dạng $\pm 3k$ hoặc $\pm k$, luôn khác 0).

Suy ra mâu thuẫn. Giả sử ban đầu là sai.

Vậy không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$ (đpcm).
□

2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 5 &= (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2(xy + x + 2) \\ 6y^2 + z^2 + 6 &= (4y^2 + z^2) + 2(y^2 + 1) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4(yz + y + 1) \\ 3z^2 + 4x^2 + 16 &= (z^2 + 4x^2) + 2(z^2 + 4) + 8 \geq 4zx + 8z + 8 = 4(zx + 2z + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} &\leq \frac{x}{2(xy + x + 2)}, \quad \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} \leq \frac{y}{2(yz + y + 1)} \\ \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} &\leq \frac{z}{zx + 2z + 2} \end{aligned}$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} VT &\leq \frac{x}{2(xy + x + 2)} + \frac{y}{2(yz + y + 1)} + \frac{z}{zx + 2z + 2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{2z}{zx + 2z + 2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{2z}{zx + 2z + xyz} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xy + x + 2} + \frac{2}{x + xy + 2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

1. Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .
2. Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
3. Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.

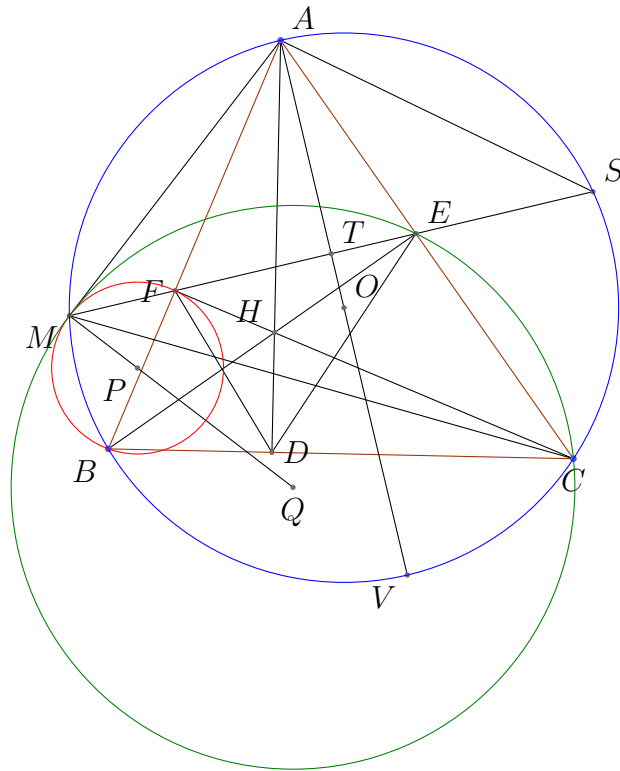
1. Vì $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$ nên $BFHD$ nội tiếp.

Vì $\widehat{HEC} = \widehat{HDC} = 90^\circ$ nên $CEHD$ nội tiếp.

Vì $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên $BFEC$ nội tiếp.

Do đó, ta có: $\widehat{FHD} = \widehat{FBH} = \widehat{FBE} = \widehat{FCE} = \widehat{HCE} = \widehat{HDE}$

Vậy DH là phân giác $\widehat{FDE}$.



2. Kí hiệu S_{ABC} là diện tích ΔABC , khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} &= \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}HE \cdot AC}{\frac{1}{2}BE \cdot AC} + \frac{\frac{1}{2}HF \cdot AB}{\frac{1}{2}CF \cdot AB} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CHA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} \\ &\Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1 \end{aligned}$$

3. Gọi giao điểm thứ hai của EF với (O) là S .

Kẻ đường kính AV của (O) . Gọi T là giao AV với EF .

Ta có $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (do $BFEC$ nội tiếp)

$\widehat{FAT} = \widehat{BAV} = \widehat{BCV}$

Do đó $\widehat{AFE} + \widehat{FAT} = \widehat{ACB} + \widehat{BCV} = \widehat{ACV} = 90^\circ$

Vậy $AO \perp EF$. Do đó $AM = AN$

Suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{MBF} = \widehat{MCE}$

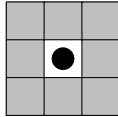
Vậy nên $\widehat{AMP} = \widehat{AMF} + \widehat{FMP} = \widehat{AMF} + \frac{180^\circ - \widehat{MPF}}{2} = \widehat{MBF} + 90^\circ - \widehat{MBF} = 90^\circ$. Suy ra $AM \perp MP$.

Ta có $\widehat{AMQ} = \widehat{AMF} + \widehat{EMQ} = \widehat{MCE} + \frac{180^\circ - \widehat{MQE}}{2} = \widehat{MCE} + 90^\circ - \widehat{MCE} = 90^\circ$

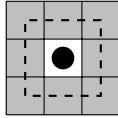
Suy ra $AM \perp MQ$.

Vậy ta có M, P, Q thẳng hàng và $PQ \perp AM$. □

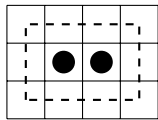
Câu 5. Có thể đặt tối đa bao nhiêu quân vua vào bàn cờ 12×12 sao cho mỗi quân vua có thể ăn được đúng một quân vua khác trong một nước đi? Quân vua trong một nước có thể di chuyển đến một trong 8 ô xung quanh như hình dưới đây.



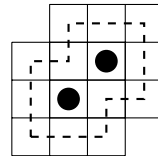
Chúng ta đánh dấu một phần bàn cờ rộng 2×2 ô vuông như là một “vương quốc” cho mỗi quân cờ vua như hình dưới đây.



Chúng ta có nhận xét sau nếu phần vương quốc của hai quân vua bất kì không giao nhau thì không quân nào trong hai quân vua đó có thể ăn được nhau trong một nước đi. Nếu hai quân vua có chung một phần vương quốc thì hai quân vua có thể ăn được nhau trong đúng một nước đi. Ta gộp hai quân vua đó thành một nhóm, vương quốc của nhóm này bao gồm vương quốc của cả 2 quân vua. Chỉ có hai dạng vương quốc như hình dưới đây.

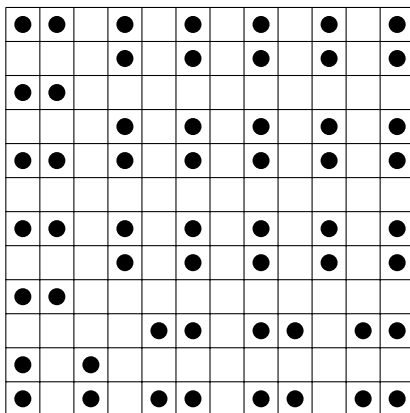


Loại 1



Loại 2

Khi ấy ta thấy được vương quốc loại 1 bao phủ phần diện tích bằng 6 ô vuông đơn vị, trong khi vương quốc loại 2 bao phủ phần diện tích bằng 7 ô vuông đơn vị. Gọi số vương quốc loại 1 là a và số vương quốc loại 2 là b . Ta có tổng số quân vua trên bàn cờ là $2(a + b)$. Để ý rằng tổng diện tích che phủ của các vương quốc lớn nhất có thể là một hình có kích thước 13×13 , khi mà có một số quân vua được đặt ở cạnh bàn cờ. Phần diện tích này rộng bằng 169 ô vuông đơn vị. Vì các vương quốc của các cặp 2 quân vua không thể giao nhau nên ta có bất đẳng thức sau: $6a + 7b \leq 169$. Trong đó $6a$ là tổng diện tích của các vương quốc loại 1 và $7b$ là tổng diện tích của các vương quốc loại 2. Vì $6(a + b) \leq 6a + 7b = 169$ nên $2(a + b) \leq 56$. Vậy có thể đặt được tối đa 56 quân vua lên bàn cờ sao cho mỗi quân có thể ăn được đúng một quân vua khác trong một nước đi. Chúng ta có thể sắp xếp các quân cờ như hình dưới đây. $\square$



ĐỀ 22

LỜI GIẢI

Câu 1.

- Một tổ học sinh gồm có 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ tổ đó để tham gia đội tình nguyện. Tính xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nam.
- Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn $P(8) - P(5) = 2025$. Chứng minh rằng $P(12) - P(9)$ là một số lẻ.

- Tổng số học sinh trong tổ là: $5 + 7 = 12$ (học sinh).

Số phần tử của không gian mẫu (chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 12 học sinh) là:

$$n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$$

Gọi A là biến cố: "Trong 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nam".

Khi đó, biến cố đối $\bar{A}$ là: "Trong 3 học sinh được chọn không có học sinh nam nào" (cả 3 học sinh đều là nữ).

Số phần tử của biến cố $\bar{A}$ là:

$$n(\bar{A}) = C_7^3 = 35$$

Xác suất của các biến cố được tính như sau:

$$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$$

Vậy xác suất để trong 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nam là $\frac{37}{44}$. □

- Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} P(8) - P(5) &= (64a + 8b + c) - (25a + 5b + c) = 2025 \\ \iff 39a + 3b &= 2025 \end{aligned}$$

Xét biểu thức cần chứng minh:

$$\begin{aligned} P(12) - P(9) &= (144a + 12b + c) - (81a + 9b + c) \\ &= 63a + 3b \\ &= (39a + 3b) + 24a \\ &= 2025 + 24a \end{aligned}$$

Vì $a \in \mathbb{N}^*$ nên $24a$ là một số chẵn.

Mặt khác, 2025 là một số lẻ.

Do đó, $(2025 + 24a)$ là một số lẻ.

Vậy $P(12) - P(9)$ là một số lẻ (đpcm). □

Câu 2.

- Cho $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + xy - 1 : xy + x + y + 1$.
Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 : y + 1$.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p để $1 + 2^p + 3^p$ là số chính phương.

- Điều kiện để phép chia có nghĩa: $xy + x + y + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $y \neq -1$.

Ta biến đổi biểu thức bị chia:

$$\begin{aligned} A &= x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + xy - 1 \\ A &= (x^3 + x^2 - x - 1) + (y^3 + y^2 - y - 1) + (xy + x + y + 1) \\ A &= x^2(x+1) - (x+1) + y^2(y+1) - (y+1) + (x+1)(y+1) \\ A &= (x^2 - 1)(x+1) + (y^2 - 1)(y+1) + (x+1)(y+1) \end{aligned}$$

Theo giả thiết, $A : (xy + x + y + 1)$ tức là $A : (x+1)(y+1)$.

Suy ra thương $\frac{A}{(x+1)(y+1)}$ là một số nguyên k .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{(x^2 - 1)(x+1)}{(x+1)(y+1)} + \frac{(y^2 - 1)(y+1)}{(x+1)(y+1)} + 1 = k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{y+1} + \frac{y^2 - 1}{x+1} = k - 1 \end{aligned}$$

Đặt $u = \frac{x^2 - 1}{y+1}$ và $v = \frac{y^2 - 1}{x+1}$. Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên u, v là các số hữu tỉ ($u, v \in \mathbb{Q}$).

Ta có tổng:

$$u + v = k - 1 \in \mathbb{Z}$$

Mặt khác, xét tích của chúng:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{x^2 - 1}{y+1} \cdot \frac{y^2 - 1}{x+1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{y+1} \cdot \frac{(y-1)(y+1)}{x+1} \\ &= (x-1)(y-1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Do tổng $u + v \in \mathbb{Z}$ và tích $u \cdot v \in \mathbb{Z}$, theo định lý Viète đảo, u và v là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - (u+v)t + uv = 0$$

Phương trình này có hệ số nguyên và hệ số bậc cao nhất bằng 1. Theo định lý về nghiệm hữu tỉ, mọi nghiệm hữu tỉ của phương trình đa thức monic có hệ số nguyên đều phải là số nguyên.

Thật vậy, giả sử $u = \frac{p}{q}$ (với $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ và $\text{ƯCLN}(p, q) = 1$). Thay u vào phương trình trên ta có:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - (u+v)\frac{p}{q} + uv = 0 \Leftrightarrow p^2 = q \cdot [(u+v)p - uv \cdot q]$$

Do $(u + v)$ và uv là các số nguyên nên $[(u + v)p - uv \cdot q] \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 : q$.

Mà $\text{ƯCLN}(p, q) = 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow u \in \mathbb{Z}$.

Tức là $\frac{x^2 - 1}{y + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x^2 - 1) : (y + 1)$.

Xét biểu thức cần chứng minh $B = x^4 + y^9$, ta tách:

$$B = (x^4 - 1) + (y^9 + 1)$$

- Vì $(x^2 - 1) : (y + 1)$, ta có: $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) : (y + 1)$.
- Theo hằng đẳng thức: $y^9 + 1 = (y + 1)(y^8 - y^7 + \dots - y + 1) : (y + 1)$.

Từ hai điều trên, suy ra $(x^4 - 1) + (y^9 + 1) : (y + 1)$, hay $(x^4 + y^9) : (y + 1)$. (Điều phải chứng minh). $\square$

2. Giả sử $1 + 2^p + 3^p = k^2$ với $k \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố.

- **Trường hợp 1:** $p = 2$.
Ta có: $1 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$ (loại)
- **Trường hợp 2:** $p = 3$.
Ta có: $1 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$ (thỏa mãn)
Vậy $p = 3$ là một nghiệm.
- **Trường hợp 3:** p là số nguyên tố lớn hơn 3.
Khi đó, p là số lẻ và $p \geq 5$.
Xét phương trình theo modulo 3:
 - Vì p lẻ nên $2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{3}$.
 - $3^p \equiv 0 \pmod{3}$.
Suy ra: $k^2 = 1 + 2^p + 3^p \equiv 1 - 1 + 0 \equiv 0 \pmod{3}$.
Do $k^2 : 3 \Rightarrow k : 3 \Rightarrow k^2 : 9$.

Tiếp tục xét phương trình theo modulo 9:

Vì $p \geq 5$ nên $3^p = 243 \cdot 3^{p-5} \equiv 0 \pmod{9}$.

Để $k^2 : 9$ thì:

$$1 + 2^p + 3^p \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 1 + 2^p \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow 2^p \equiv -1 \equiv 8 \pmod{9}$$

Xét chu kỳ số dư của 2^n khi chia cho 9:

- $2^1 \equiv 2 \pmod{9}$
- $2^2 \equiv 4 \pmod{9}$
- $2^3 \equiv 8 \pmod{9}$
- $2^4 \equiv 7 \pmod{9}$
- $2^5 \equiv 5 \pmod{9}$
- $2^6 \equiv 1 \pmod{9}$

Chu kỳ đồng dư lặp lại với độ dài là 6. Để $2^p \equiv 8 \pmod{9}$, ta bắt buộc phải có $p \equiv 3 \pmod{6}$.

Tức là $p = 6m + 3 = 3(2m + 1)$ với $m \in \mathbb{N}^*$.

Phân tích này cho thấy $p : 3$. Nhưng do p là số nguyên tố lớn hơn 3, điều này là vô lý (mâu thuẫn).

Do đó, không tồn tại số nguyên tố $p > 3$ nào thỏa mãn.

Vậy số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $p = 3$. □

Câu 3.

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

2. Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a^2 + b^2 + 1 \vdots ab$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

Cách 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}) \sqrt{b+c}} \\ &+ \frac{b}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}) \sqrt{a+c}} \\ &+ \frac{c}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}) \sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{2a}\sqrt{b+c} &\leq \frac{2a+b+c}{2} \\ \sqrt{2b}\sqrt{a+c} &\leq \frac{2b+a+c}{2} \\ \sqrt{2c}\sqrt{a+b} &\leq \frac{2c+a+b}{2} \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{2a}{2a+5b+5c} + \frac{2b}{2b+5a+5c} + \frac{2c}{2c+5a+5b} \\ &= 2 \left(\frac{a^2}{2a^2+5ab+5ac} + \frac{b^2}{2b^2+5ab+5bc} + \frac{c^2}{2c^2+5ac+5bc} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a^2+5ab+5ac} &\geq 2 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+2b^2+2c^2+10ab+10bc+10ca} \\ &\geq 2 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right) - (\sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} + \sqrt{a+b}) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right) \geq \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{3 \cdot 2 \cdot (a+b+c)}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{3 \cdot 2 \cdot (a+b+c)}} - \sqrt{3 \cdot 2 \cdot (a+b+c)} \\ &= \frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Cách 3. Do bất đẳng thức thuần nhất, chuẩn hóa $a+b+c = 3$. Dễ dàng sử dụng phương pháp tiếp tuyến (đã nhắc tới ở những đề trước), ta có:

$$\frac{t}{\sqrt{3-t}} \geq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}(t-1)$$

Thật vậy:

$$\frac{t}{\sqrt{3-t}} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} - \frac{3(t-1)}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{3-t} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3-t} + \sqrt{2})(5\sqrt{3-t} + 6\sqrt{2})}{4\sqrt{3-t}(\sqrt{2} + \sqrt{3-t})} \geq 0$$

Suy ra:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{3-a}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{3}{4\sqrt{2}}(a+b+c-3) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

2. Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên $ab > 0$. Giả sử tồn tại các cặp số (a, b) thỏa mãn đề bài mà $a^2 + b^2 + 1 \neq 3ab$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Do đó $k \neq 3$.

$$\Rightarrow a^2 - kba + b^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Trong các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn (1), gọi (a_0, b_0) là cặp số có tổng $a_0 + b_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_0 \geq b_0$.

Cố định b_0 , xét phương trình bậc hai đối với ẩn t :

$$t^2 - kb_0t + b_0^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) nhận a_0 làm một nghiệm. Theo định lý Viète, nghiệm còn lại a_1 thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = kb_0 \\ a_0a_1 = b_0^2 + 1 \end{cases}$$

Vì $a_0, k, b_0 \in \mathbb{N}^*$ nên $a_1 = kb_0 - a_0 \in \mathbb{Z}$.

Mặt khác, từ $a_0a_1 = b_0^2 + 1 > 0$ và $a_0 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$. Suy ra $a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, cặp (a_1, b_0) cũng là một nghiệm nguyên dương của (1).

Do cách chọn cặp (a_0, b_0) có tổng nhỏ nhất nên:

$$a_0 + b_0 \leq a_1 + b_0 \Rightarrow a_0 \leq a_1$$

Từ $a_0 \geq b_0$, ta xét hai trường hợp:

○ **Trường hợp 1:** $a_0 = b_0$.

Thay vào (1): $2a_0^2 + 1 = ka_0^2 \Leftrightarrow a_0^2(k - 2) = 1 \Rightarrow a_0^2 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$.

Khi đó $k - 2 = 1 \Rightarrow k = 3$ (Mâu thuẫn với giả sử $k \neq 3$).

○ **Trường hợp 2:** $a_0 > b_0 \Rightarrow a_0 \geq b_0 + 1$.

Ta có: $a_1 = \frac{b_0^2 + 1}{a_0} \leq \frac{b_0^2 + 1}{b_0 + 1} < \frac{b_0^2 + b_0}{b_0 + 1} = b_0 \leq a_0$.

Suy ra $a_1 < a_0$ (Mâu thuẫn với khẳng định $a_0 \leq a_1$ ở trên).

Trong mọi trường hợp đều dẫn tới mâu thuẫn, vậy giả sử sai.

Do đó, ta phải có $k = 3$, tức là $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$. (Điều phải chứng minh). □

Câu 4.

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Đường thẳng MN cắt (O) tại P và Q (P thuộc cung nhỏ AB , Q thuộc cung nhỏ AC). Lấy điểm D thuộc cạnh BC ($D \neq B, C$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I ($I \neq B$). Đường thẳng DI cắt AC tại K .

1. Chứng minh tứ giác $AIPK$ nội tiếp.

2. Chứng minh rằng: $\frac{PK}{PD} = \frac{QB}{QA}$.

3. Gọi CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G ($G \neq P$). Đường thẳng IG cắt BC tại E . Chứng minh rằng khi D di động trên cạnh BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

1. Ta có: $\widehat{PBI} = \widehat{PBA} = \widehat{PDI} = \widehat{PCA}$ hay $\widehat{PDK} = \widehat{PCK}$

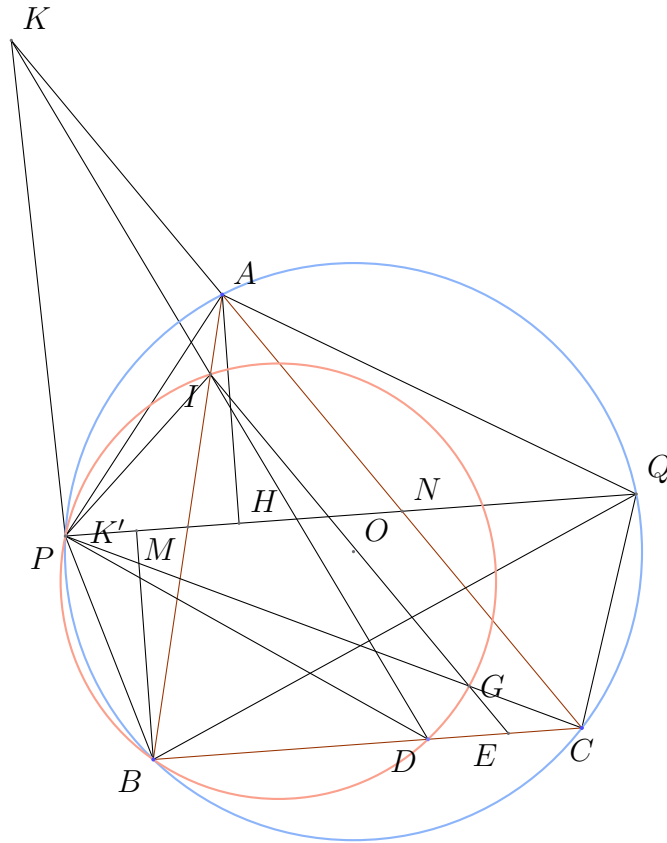
Suy ra tứ giác $PDCK$ nt.

$$\begin{aligned} \text{Có: } \widehat{PIA} &= 180^\circ - \widehat{PIB} \\ &= 180^\circ - \widehat{PDB} \\ &= \widehat{PDC} = 180^\circ - \widehat{PKC} \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{PIA} + \widehat{PKC} = 180^\circ$

$\Rightarrow AKPI$ nội tiếp

$$\begin{aligned} &2. \Delta APB \sim \Delta KPD \text{ (g.g)} \\ \Rightarrow \frac{PK}{PA} &= \frac{PD}{PB} \Rightarrow \frac{PK}{PD} = \frac{PA}{PB} \end{aligned}$$



Kẻ $AH \perp PQ$ tại H , $BK' \perp PQ$ tại K' . Suy ra $AH = BK'$.

Dễ chứng minh: $AH = PA \cdot \sin \widehat{APH}$

$$\Rightarrow AH = PA \cdot \frac{QA}{2R}$$

(chứng minh bằng cách kẻ đường kính AQ')

$$\text{Tương tự: } BK' = PB \cdot \frac{QB}{2R}$$

$$\text{Suy ra } PA \cdot QA = PB \cdot QB$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{QB}{QA}$$

Suy ra đpcm.

$$3. \text{ Ta có: } \widehat{IGP} = \widehat{IBP} = \widehat{ABP} = \widehat{PCA}$$

Suy ra $IG \parallel AC$.

$$\text{Có: } \frac{BE}{BC} = \frac{BI}{BA} \Rightarrow BE = BC \cdot \frac{BI}{AB}$$

$$CE = BC - BE = BC - \frac{BC \cdot BI}{AB} = \frac{BC(AB - BI)}{AB}$$

$$= AI \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$\Delta PIA \sim \Delta PDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{CD} = \frac{PA}{PC}$$

$$\Rightarrow CD = AI \cdot \frac{PC}{PA}$$

$$\text{Suy ra } \frac{CD}{CE} = \frac{AI \cdot \frac{PC}{PA}}{AI \cdot \frac{BC}{AB}} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{AB}{BC}$$

Do A, B, C, P cố định nên $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

□

Câu 5. Cho bảng ô vuông kích thước 10×10 ban đầu có 100 ô trắng. Mỗi lần biến đổi, ta được phép đổi toàn bộ màu của các ô thuộc một hàng hoặc một cột (Trắng thành Đen, Đen thành Trắng). Biết tổng số ô đen sau n bước là một số chính phương khác 0. Tìm n .

Giả sử sau n bước biến đổi, có r hàng được chọn một số lẻ lần và c cột được chọn một số lẻ lần ($0 \leq r, c \leq 10$).

Khi đó, một ô ở giao điểm của hàng i và cột j sẽ có màu đen khi và chỉ khi nó được đổi màu một số lẻ lần, tức là một trong hai đường (hàng hoặc cột chứa nó) được chọn một số lẻ lần và đường còn lại được chọn một số chẵn lần.

Tổng số ô đen trên bảng sau n bước là:

$$S = r(10 - c) + c(10 - r) = 10r + 10c - 2rc$$

Theo giả thiết, S là một số chính phương khác 0, đặt $S = k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Ta có:

$$\begin{aligned} k^2 = 10r + 10c - 2rc &\Rightarrow 2k^2 = 20r + 20c - 4rc \\ &\Leftrightarrow 2k^2 - 100 = -(4rc - 20r - 20c + 100) \\ &\Leftrightarrow 100 - 2k^2 = (2r - 10)(2c - 10) \\ &\Leftrightarrow (5 - r)(5 - c) = 25 - \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

Vì $r, c \in \mathbb{Z}$ nên vế trái là số nguyên, suy ra $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k:2 \Rightarrow k^2:4$.

Mặt khác, $0 < S \leq 100 \Rightarrow 0 < k^2 \leq 100$. Do $25 - \frac{k^2}{2}$ phải là tích của hai số nguyên từ -5 đến 5 (vì $0 \leq r, c \leq 10 \Rightarrow -5 \leq 5 - r, 5 - c \leq 5$), ta xét các giá trị của $k^2 \in \{4, 16, 36, 64, 100\}$:

- Nếu $k^2 = 4 \Rightarrow (5 - r)(5 - c) = 23$ (Loại vì $23 > 5 \times 5$).
- Nếu $k^2 = 16 \Rightarrow (5 - r)(5 - c) = 17$ (Loại).
- Nếu $k^2 = 36 \Rightarrow (5 - r)(5 - c) = 7$ (Loại).
- Nếu $k^2 = 64 \Rightarrow (5 - r)(5 - c) = -7$ (Loại, vì $-7 = 1 \times (-7) = (-1) \times 7$, mà các thừa số phải thuộc $[-5; 5]$).
- Nếu $k^2 = 100 \Rightarrow (5 - r)(5 - c) = -25$.
 - Do $-5 \leq 5 - r, 5 - c \leq 5$ nên bắt buộc phải có một thừa số bằng 5 và một thừa số bằng -5 .
 - $\Rightarrow \{5 - r, 5 - c\} = \{5, -5\} \Rightarrow \{r, c\} = \{0, 10\}$ hoặc $\{r, c\} = \{10, 0\}$.

Như vậy, để số ô đen là số chính phương khác 0 thì trạng thái cuối cùng phải có ($r = 0, c = 10$) hoặc ($r = 10, c = 0$).

Mỗi bước biến đổi (chọn 1 hàng hoặc 1 cột để đổi màu) đều làm thay đổi tính chẵn lẻ của tổng số lần chọn của hàng hoặc cột đó. Do đó, tổng số bước n và tổng $(r + c)$ phải có cùng tính chẵn lẻ:

$$n \equiv r + c \pmod{2}$$

Với $\{r, c\} = \{0, 10\}$, ta có $r + c = 10 \equiv 0 \pmod{2}$. Suy ra n phải là một số chẵn.

Vậy n là số nguyên dương chẵn bất kỳ ($n \in \mathbb{N}^*, n:2$). □

ĐỀ 23

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{6} - 6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
2. Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng: $(d_1) : y = x + 2$; $(d_2) : y = -2x - 1$ và $(d_3) : y = (2m - 1)x + 3 - m$ đồng quy.

1. Ta có:

$$A = \sqrt{12 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} + \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$A = |2\sqrt{3} + 1| - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$A = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} \quad (\text{vì } 2\sqrt{3} + 1 > 0)$$

$$A = 1$$

Vậy $A = 1$. □

2. Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -2x - 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -3 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra (d_1) cắt (d_2) tại điểm $M(-1; 1)$.

Để ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy thì (d_3) phải đi qua điểm $M(-1; 1)$. Thay $x = -1, y = 1$ vào phương trình đường thẳng (d_3) , ta có:

$$1 = (2m - 1)(-1) + 3 - m$$

$$\Leftrightarrow 1 = -2m + 1 + 3 - m$$

$$\Leftrightarrow 3m = 3$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Với $m = 1$, phương trình (d_3) trở thành $y = x + 2$, trùng với (d_1) (không thỏa mãn điều kiện ba đường thẳng phân biệt đồng quy).

Để ba đường thẳng đồng quy thì chúng phải phân biệt, tức là:

$$\begin{cases} 2m - 1 \neq 1 \\ 3 - m \neq 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2m - 1 \neq -2 \\ 3 - m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1$$

Do đó, không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Câu 2.

1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{4x^2 - 14x + 16} + 1 = x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

2. Tìm tất cả các số nguyên tố p và số nguyên dương n sao cho:

$$p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$$

1. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4(x^2 - 4x + 5) + 2(x - 1) - 2} = (x - 1) + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ suy ra $a \geq 2$ và $b = x - 1$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 + 2b - 2} = a + b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 2b - 2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + (2b - 2) - 2ab - b^2 = 0$$

Ta có ngay $a^2 - b^2 = 4 - 2x = 2 - 2b$

Thế vào trên ta được

$$3a^2 + (b^2 - a^2) - 2ab - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2 \\ a(a - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

Với $a = b \Rightarrow x = 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

□

2. Nếu $p = 2$ thì $3^n = 3 \Rightarrow n = 1$.

Nếu $p \geq 3$ thì $p^3 - 2p^2 + p + 1 = p(p - 1)^2 + 1$, p là số lẻ nên $(p - 1)^2 : 4$ dẫn đến $p(p - 1)^2 + 1$ chia 4 dư 1. Suy ra 3^n chia 4 dư 1, nên n phải là số chẵn. Đặt $n = 2m$. Ta có:

$p(p - 1)^2 = 3^{2m} - 1 \Leftrightarrow p(p - 1)^2 = (3^m - 1)(3^m + 1)$. Vì $(3^m - 1, 3^m + 1) = 2$ và p là số nguyên tố lẻ nên xảy ra các khả năng sau.

TH1: $\begin{cases} 3^m - 1 : p \\ 3^m + 1 \not\equiv p \end{cases}$ ta có $(p - 1)^2 = \frac{3^m - 1}{p}(3^m + 1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3^m - 1}{p} = 2a^2 \\ 3^m + 1 = 2b^2 \end{cases}$ suy ra $2b^2$ chia 3 dư 1 (vô lý).

TH2: $\begin{cases} 3^m + 1 : p \\ 3^m - 1 \not\equiv p \end{cases}$ ta có $(p - 1)^2 = \frac{3^m + 1}{p}(3^m - 1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3^m + 1}{p} = 2b^2 \\ 3^m - 1 = 2a^2 \end{cases}$.

Xét $3^m - 1 = 2a^2$, nếu m lẻ $3^m = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k$ suy ra $3^m - 1$ chia 4 dư 2 nên a lẻ, b chẵn mà $3^m + 1 = 2pb^2$ và $2pb^2 : 8$ còn $3^m + 1 = 3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot 9^k + 1 \equiv 4 \pmod{8}$ vô lý.

Nếu m chẵn $m = 2k$ thì $3^m - 1 = 2a^2 \Leftrightarrow (3^k - 1)(3^k + 1) = 2a^2$. Ta cũng có 2 khả năng.

Và các tứ giác $AEHF, HECD$ nội tiếp thì $\angle FEB = \angle BAH = \angle BCH = \angle DEH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BFE \sim \triangle DHE \Rightarrow \frac{BF}{DH} = \frac{EF}{HE} \Leftrightarrow \frac{BF}{2DH} = \frac{EF}{2HE} \Leftrightarrow \frac{BF}{SH} = \frac{FI}{HE}$.

Suy ra $\triangle BFI \sim \triangle SHE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle FBI = \angle HSE = \angle ABX$.

Suy ra B, I, X thẳng hàng.

3. Gọi J là giao của AK với (O) . Kẻ hai đường kính CG, BL của (O) .

Gọi T, R là giao của JG, JL với BC . Ta có:

$$\triangle BGC \sim \triangle EHC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{BG}{GC} = \frac{EH}{HC} = \frac{NE}{NC} \Rightarrow TN \parallel BE.$$

Do tam giác AMN cân và K là điểm chính giữa cung nhỏ MN của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN nên AK là đường kính, khi đó $\angle ANK = 90^\circ$.

Hay $TN \parallel BE \parallel KN$. Nên T, K, N thẳng hàng.

Do G, J cố định suy ra T cố định.

Tương tự R cố định.

$$\text{Ta có: } \angle TJR + \angle TKR = \frac{\angle GOL}{2} + \angle MKN = \frac{\angle BOC}{2} + \angle MKN = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $KRJT$ nội tiếp.

Mặt khác do T, R, J cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác TJR cố định.

Suy ra K luôn thuộc một đường tròn cố định. $\square$

Câu 4.

- Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x > y$ và $(x - y, xy + 1) = (x + y, xy - 1) = 1$. Chứng minh rằng: $(x + y)^2 + (xy - 1)^2$ không phải là số chính phương.
- Xét x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + zx - 2xyz$$

- Ta có $A = (x + y)^2 + (xy - 1)^2 = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$, giả sử $x^2 + 1, y^2 + 1$ cùng chia hết cho số nguyên tố d thì $A : d^2$, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + 1 : d \\ y^2 + 1 : d \end{cases} \Rightarrow (x^2 + 1) - (y^2 + 1) : d \text{ hay } (x - y)(x + y) : d.$$

Do d là số nguyên tố nên trong 2 số $(x - y), (x + y)$ tồn tại ít nhất 1 số chia hết cho d , giả sử $x + y : d$ suy ra $(x + y)^2 : d^2$.

Ta có: $A = (x + y)^2 + (xy - 1)^2 : d^2$ mà $(x + y)^2 : d^2$ suy ra $(xy - 1)^2 : d^2 \Rightarrow xy - 1 : d$ như vậy $x + y, xy - 1$ còn có 1 ước chung là $d > 1$ (trái với giả thiết). Suy ra $(x^2 + 1, y^2 + 1) = 1$.

Tương tự trường hợp $x - y : d$ chú ý $A = (x - y)^2 + (xy + 1)^2$ ta cũng suy ra $(x^2 + 1, y^2 + 1) = 1$.

Như vậy A là số chính phương khi và chỉ khi $x^2 + 1, y^2 + 1$ đồng thời là số chính phương.

Nhưng do x nguyên dương nên ta có: $x^2 < x^2 + 1 < x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 < x^2 + 1 < (x + 1)^2$ nên $x^2 + 1$ không thể là số chính phương.

Vậy: $(x + y)^2 + (xy - 1)^2$ không phải là số chính phương. $\square$

- Nếu chia trực số thành hai phần bởi số 0, thì trong 3 số $(2x - 1), (2y - 1), (2z - 1)$ luôn tồn tại hai số nằm về cùng phía, không mất tính tổng quát giả sử

$$(2x - 1)(2y - 1) \geq 0 \Rightarrow 2(x + y) - 4xy \leq 1 \Rightarrow z(x + y) - 2xyz \leq \frac{z}{2}.$$

Từ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ suy ra

$$1 - z^2 = 2xyz + x^2 + y^2 \geq 2xy + 2xyz = 2xy(z + 1) \Rightarrow xy \leq \frac{1 - z}{2}.$$

Vì vậy $P = xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{1 - z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}.$

Với $x = y = z = \frac{1}{2}$ thì P bằng $\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$. □

Câu 5. Tồn tại hay không tập hợp A gồm hữu hạn các số thực dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

1. A có ít nhất hai phần tử.
2. Với mọi $a, b \in A, a \neq b$ thì $\sqrt{a} - \frac{2}{3}b \in A$.

Giả sử phản chứng, tồn tại một tập hợp A gồm hữu hạn các số thực dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của bài toán.

Vì A là tập hợp hữu hạn các số thực và có ít nhất 2 phần tử (theo điều kiện 1), nên tập A chắc chắn tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

Gọi M là phần tử lớn nhất và m là phần tử nhỏ nhất của tập A .

Do A chứa ít nhất 2 phần tử và các phần tử đều là số thực dương nên ta có:

$$M > m > 0$$

Xét cặp phần tử $m, M \in A$ (với $m \neq M$), theo điều kiện 2 của bài toán, ta phải có:

$$\sqrt{m} - \frac{2}{3}M \in A$$

Vì m là phần tử nhỏ nhất của tập A , nên mọi phần tử thuộc A đều phải lớn hơn hoặc bằng m . Do đó:

$$\begin{aligned} \sqrt{m} - \frac{2}{3}M &\geq m \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}M &\leq \sqrt{m} - m \end{aligned} \quad (1)$$

Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{m} - m$. Ta biến đổi như sau:

$$\sqrt{m} - m = \frac{1}{4} - \left(m - \sqrt{m} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Vì $\left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $m > 0$, nên ta suy ra:

$$\sqrt{m} - m \leq \frac{1}{4}$$

Thay kết quả này vào bất đẳng thức (1), ta được:

$$\frac{2}{3}M \leq \frac{1}{4} \Rightarrow M \leq \frac{3}{8}$$

Như vậy, mọi phần tử của tập A đều nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{3}{8}$. Suy ra $M < 1$ và $m < 1$, kéo theo:

$$\sqrt{M} + \sqrt{m} < \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \quad (*)$$

Tiếp tục, xét cặp phần tử $M, m \in A$ (với $M \neq m$), theo điều kiện 2, ta cũng có:

$$\sqrt{M} - \frac{2}{3}m \in A$$

Vì M là phần tử lớn nhất của tập A , nên mọi phần tử thuộc A đều phải nhỏ hơn hoặc bằng M . Do đó:

$$\begin{aligned} \sqrt{M} - \frac{2}{3}m &\leq M \\ \Leftrightarrow \sqrt{M} - M &\leq \frac{2}{3}m \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ bất đẳng thức:

$$\begin{cases} m + \frac{2}{3}M \leq \sqrt{m} \\ M + \frac{2}{3}m \geq \sqrt{M} \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai bất đẳng thức trên (lấy bất đẳng thức dưới trừ bất đẳng thức trên), ta được:

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{2}{3}m\right) - \left(m + \frac{2}{3}M\right) &\geq \sqrt{M} - \sqrt{m} \\ \Leftrightarrow M - m - \frac{2}{3}(M - m) &\geq \sqrt{M} - \sqrt{m} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(M - m) &\geq \sqrt{M} - \sqrt{m} \end{aligned} \quad (3)$$

Vì $M > m > 0$, ta có thể nhân lượng liên hợp cho vế phải của (3):

$$\sqrt{M} - \sqrt{m} = \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{M} + \sqrt{m})}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} = \frac{M - m}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}$$

Thay vào (3), ta được:

$$\frac{1}{3}(M - m) \geq \frac{M - m}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}$$

Do $M > m$ nên $M - m > 0$. Chia cả hai vế của bất đẳng thức cho $(M - m)$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\geq \frac{1}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{M} + \sqrt{m} &\geq 3 \end{aligned}$$

Điều này hoàn toàn mâu thuẫn với nhận xét (*) ở trên là $\sqrt{M} + \sqrt{m} < 2$.

Vậy, không tồn tại tập hợp A nào thỏa mãn đề bài. □

ĐỀ 24

LỜI GIẢI

Câu 1

1. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $xy + x + y = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$S = 2x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} + 2y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

2. Cho $f(x)$ là đa thức bậc 3 với hệ số của hạng tử có bậc cao nhất là 1, thỏa mãn điều kiện $f(2023) = 2024$ và $f(2024) = 2025$. Tính giá trị của biểu thức $Q = -3f(2025) + f(2026)$.

1. Theo gt: $xy + x + y = 1 \Rightarrow xy + x + y + 1 = 2 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 2$

$$\text{Ta có: } x^2 + 1 = x^2 + 1 + 0 = x^2 + 1 + xy + x + y - 1 = x^2 + xy + x + y = (x+y)(x+1)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + 1 = (x+y)(y+1)$$

$$\text{Xét: } S = 2x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} + 2y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$= 2x\sqrt{\frac{y+1}{x+1}} + 2y\sqrt{\frac{x+1}{y+1}} + (x+y)\sqrt{(x+1)(y+1)}$$

$$(x+1)(y+1) = 2 \Rightarrow x+1 = \frac{2}{y+1}$$

$$\Rightarrow S = 2x\frac{\sqrt{2}}{x+1} + 2y\frac{\sqrt{2}}{y+1} + (x+y)\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Biến đổi ta được } S = 2\sqrt{2} \quad \square$$

2. Đặt đa thức $Q(x) = f(x) - (x+1)$, với $Q(x)$ là đa thức bậc 3 và hệ số của hạng tử bậc cao nhất cũng sẽ là 1. Ta nhận thấy rằng 2023, 2024 là nghiệm của đa thức $Q(x)$, vậy nên ta sẽ có $Q(x) = (x-2023)(x-2024).H(x)$, với $H(x)$ là đa thức bậc 1 và cũng có hệ số của hạng tử có bậc cao nhất bằng 1. Từ đây ta nhận ra $H(x)$ sẽ có dạng $(x+a)$ với a là hệ số tự do. Đến đây ta thay lại $H(x)$ và $Q(x)$ vào $f(x)$ ta được:

$$f(x) = x+1 + (x-2023)(x-2024).(x+a)$$

Quay lại với Q , ta có:

$$\begin{aligned} Q &= -3f(2025) + f(2026) = -3[2026 + 2.(2025+a)] + 2027 + 6.(2026+a) \\ &= 2027 - 3.2026 + 6(2026+a-2025-a) = 2027 - 3.2026 + 6 = -4045 \end{aligned}$$

Vậy $Q = -4045$. $\square$

Câu 2

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3y} = \frac{x + \sqrt{y}}{2x^2 + y} \\ 2(2x + \sqrt{y}) = \sqrt{2x + 6} - y \end{cases}$$

2. Một chiếc quạt giấy khi mở hết mức ra có góc ở tâm là 150° , bán kính chiếc quạt 30 cm và bán kính phần nan quạt không dán giấy là 5 cm. Giả sử khi dán giấy làm quạt, người ta phải dán đủ hai mặt và phải dư thêm 10% diện tích giấy để dán các mép và làm quạt đẹp hơn, hãy tính diện tích giấy cần thiết để dán quạt nói trên (Lấy $\pi \approx 3,14$ và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

1. Điều kiện: $y > 0; -3 \leq x \neq 0$.

Đặt $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2x^2$ thay vào (1) ta được: $\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3t^2x^2} = \frac{x + tx}{2x^2 + t^2x^2}$

Rút gọn biến x ta đưa về phương trình ẩn t :

$$(t - 2)^2(t^2 + t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2x \geq 0.$$

Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x = \sqrt{2x + 6} &\Leftrightarrow 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} = 2x + 6 + \sqrt{2x + 6} + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x + 6} + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Giải ra ta được $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4} \Rightarrow y = \frac{13 - 3\sqrt{17}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{17} - 3}{4}; \frac{13 - 3\sqrt{17}}{2}\right)$. □

2. - Diện tích hình quạt bán kính $R_1 = 30cm$ là: $S_1 = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 150}{360} = 375\pi (cm^2)$

- Diện tích hình quạt bán kính $R_2 = 5cm$ là: $S_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 150}{360} = \frac{125\pi}{12} (cm^2)$

- Diện tích cần dán giấy hai mặt là:

$$S_3 = 2(S_1 - S_2) = 2\left(375\pi - \frac{125\pi}{12}\right) = \frac{4375\pi}{6} (cm^2)$$

- Diện tích giấy cần dùng (kể cả phần dư 10%) là:

$$S = S_3 + 10\%S_3 = 1,1 \cdot \frac{4375\pi}{6} \approx 2519,8 (cm^2)$$

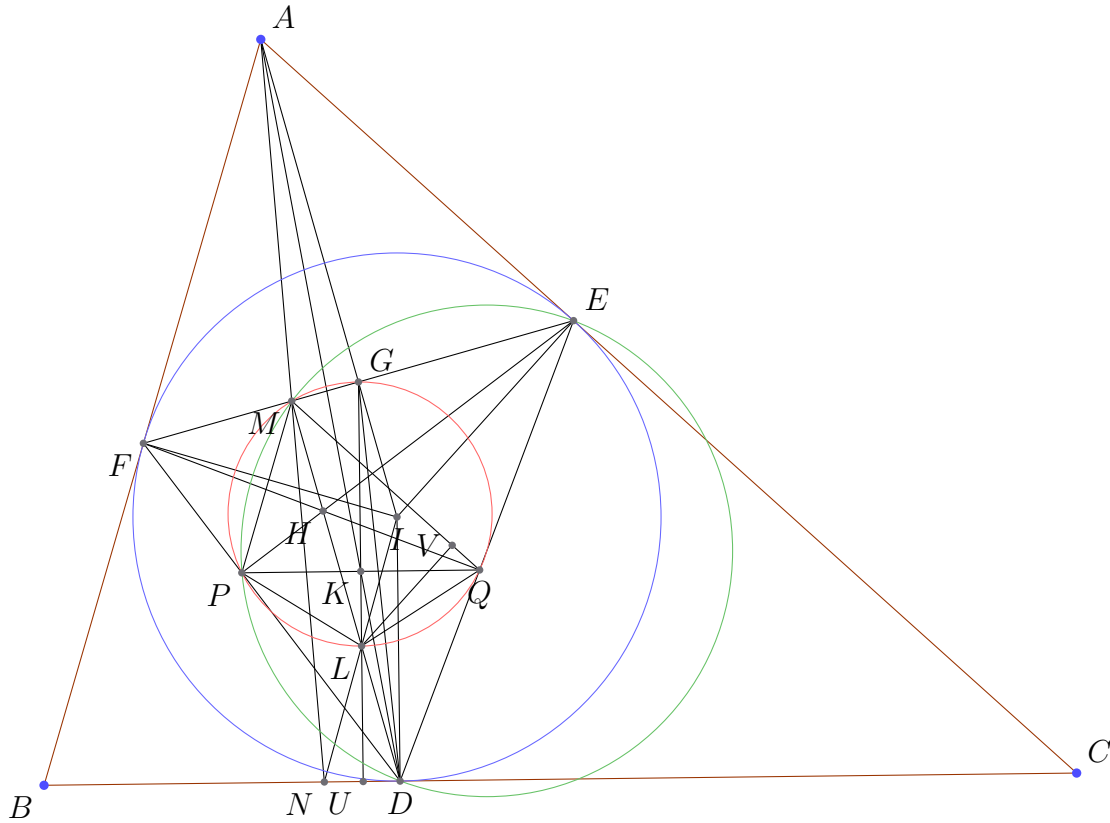
□

Câu 3 Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) , các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ D lên EF , đường thẳng qua M song song với AB cắt DF tại P , đường thẳng qua M song song với AC cắt DE tại Q .

1. Chứng minh: 4 điểm D, E, M, P nằm trên một đường tròn.

2. Gọi K là giao điểm của AD với PQ . Chứng minh: $KP = KQ$.

3. Gọi H là giao điểm của EP, FQ , N là giao điểm của AM với BC , L là giao điểm của IN, HD . Chứng minh: KL vuông góc với BC .



1. Do $MP \parallel AF$ nên

$$\widehat{FMP} = \widehat{AFE} = 90^\circ - \widehat{IFE} = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{EIF}) = \frac{1}{2}\widehat{EIF} = \widehat{EDF} \text{ suy ra}$$

$\triangle FMP \sim \triangle FDE$ (g.g) dẫn đến $\triangle FMD \sim \triangle FPE$ (c.g.c) nên $\widehat{FPE} = \widehat{FMD} = 90^\circ$, từ đó dễ dàng chứng minh được 4 điểm D, E, M, P nằm trên đường tròn đường kính DE .

2. Gọi G là trung điểm của EF , ta có: $IE = IF, AE = AF$ nên IA là trung trực của EF dẫn đến $IA \perp EF$ tại G , suy ra $\triangle IGE \sim \triangle IEA$ (g.g) dẫn đến $IE^2 = IA \cdot IG$ thay $IE = ID$ ta có: $ID^2 = IA \cdot IG$ suy ra $\triangle GID \sim \triangle DIA$ (c.g.c) nên $\widehat{IDG} = \widehat{IAD} = \widehat{ADM}$, mặt khác ta có tính chất quen thuộc: $\widehat{EDM} = \widehat{IDF}$ suy ra $\widehat{EDM} + \widehat{MDA} = \widehat{IDF} + \widehat{IDG}$ hay $\widehat{EDA} = \widehat{GDF}$, chú ý rằng: $\widehat{DPQ} = \widehat{DEF}$ nên $\triangle DPK \sim \triangle DEG$ (g.g), kết hợp với $\triangle DPQ \sim \triangle DEF$ (c.g.c) ta suy ra $\frac{KP}{EG} = \frac{PQ}{EF}$ mà $EF = 2EG$ nên $PQ = 2KP$ hay $KP = KQ$.

3. Ta trình bày 2 cách giải cho ý này như sau:

Cách 1: Định nghĩa lại L là trung điểm của HD thì $LP = LQ = LD = LH = \frac{1}{2}HD$ nên L là tâm đường tròn đi qua 4 điểm D, P, H, Q . Gọi N là giao điểm của IL với BC , ta chứng minh: A, M, N thẳng hàng. Chú ý rằng: Do $LM \parallel AI$ (cùng vuông góc với DE) nên ta chứng minh:

$$\frac{IA}{ML} = \frac{NI}{NL}$$

Ta có: 4 điểm M, P, Q, L nằm trên đường tròn O le của tam giác DEF và $LP = LQ$ nên ta dễ chứng minh được: ML là phân giác của $\widehat{PMQ}$ (học sinh tự chứng minh tính chất này). Ta có: $PM \parallel AB, MQ \parallel AC$ nên $\widehat{PMQ} = \widehat{BAC}$, suy ra $180^\circ - \widehat{PMQ} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ hay $\widehat{PLQ} = \widehat{EIF}$ dẫn đến $\widehat{LMQ} = \widehat{FAI}$. Gọi U, V là chân các đường vuông góc hạ từ L lên BC, MQ thì $\triangle AFI \sim \triangle MVL$ (g.g) dẫn đến $\frac{IA}{ML} = \frac{IF}{VL}$. Ta có: $\widehat{LQM} = 180^\circ - \widehat{MPL} = \widehat{MPF} + \widehat{LPD} = \widehat{BFD} + \widehat{LPD} = \widehat{BDP} + \widehat{LPD} = \widehat{LDU}$ suy ra $LU = LD \cdot \sin LDU = LQ \cdot \sin LQV = LV$ do đó $\frac{IA}{ML} = \frac{IF}{VL} = \frac{ID}{UL} = \frac{IN}{NL}$ suy ra A, M, N thẳng hàng bài toán được chứng minh.

Cách 2: (Hình vẽ trên là hình vẽ của cách 1, bạn đọc có thể tự vẽ hình theo cách 2 để tham khảo thêm)

Ta dễ chứng minh được: $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$, gọi AI cắt BC tại X, MD cắt PQ tại Z . Ta có tính chất quen thuộc: H là giao 3 phân giác trong của tam giác MPQ nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MPQ suy ra $\frac{MH}{HZ} = \frac{AI}{IX}$, gọi L là trung điểm của DH , ta chứng minh: I, L, N thẳng hàng. Tức là chứng minh: $\frac{ML}{LD} = \frac{AI}{IX}$ điều này tương đương với chỉ ra:

$\frac{MH}{HZ} = \frac{ML}{LD}$, mặt khác theo tính chất phân giác ta có: $\frac{MH}{HZ} = \frac{DM}{DZ}$ nên ta quy về chứng minh:

$$\frac{DM}{DZ} = \frac{ML}{LD} \text{ hay } \frac{DM - ML}{DZ - LD} = \frac{ML}{LD} \text{ tức là: } \frac{DL}{LZ} = \frac{ML}{LD} \text{ hay } LD^2 = LZ \cdot LM.$$

Chú ý rằng: LG là trung trực của PQ và $\widehat{LQG} = 90^\circ$ và $\triangle LKZ \sim \triangle LMG$ (g.g) nên $LQ^2 = LK \cdot LG = LZ \cdot LM$ (đpcm). □

Câu 4

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y để biểu thức $8x^3 + y^3 - 6xy + 1$ là số nguyên tố.
2. Xét dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$. Với mỗi số tự nhiên n , đặt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n trong khoảng $[s_n, s_{n+1})$ tồn tại ít nhất hai số chính phương.

1. Xét biểu thức $P = 8x^3 + y^3 - 6xy + 1$, ta biến đổi như sau:

$$P = (2x)^3 + y^3 + 1 - 6xy$$

$$P = (2x + y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot y(2x + y) + 1 - 6xy$$

$$P = [(2x + y)^3 + 1^3] - 6xy(2x + y + 1)$$

$$P = (2x + y + 1)[(2x + y)^2 - (2x + y) + 1] - 6xy(2x + y + 1)$$

$$P = (2x + y + 1)(4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - y + 1 - 6xy)$$

$$P = (2x + y + 1)(4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - y + 1)$$

Vì x, y là các số nguyên dương ($x \geq 1, y \geq 1$) nên:

$$2x + y + 1 \geq 2(1) + 1 + 1 = 4 > 1$$

Để P là số nguyên tố thì thừa số thứ hai buộc phải bằng 1:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - y + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của phương trình với 2, ta có:

$$\begin{aligned} 8x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - y)^2 + (2x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 2 \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $(2x - y)^2, (2x - 1)^2, (y - 1)^2$ đều là các số chính phương. Mặt khác, do $x \geq 1 \Rightarrow 2x - 1 \geq 1 \Rightarrow (2x - 1)^2 \geq 1$.

- Nếu $x \geq 2$ thì $(2x - 1)^2 \geq 3^2 = 9 > 2$ (vô lý).
- Do đó, bắt buộc $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình, ta được:

$$\begin{aligned} (2 - y)^2 + 1^2 + (y - 1)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (y - 2)^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Tổng của hai số chính phương bằng 1, nên phải có một số bằng 0 và một số bằng 1.

- **Trường hợp 1:** $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn nguyên dương).
- **Trường hợp 2:** $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ (thỏa mãn nguyên dương).
- Với $x = 1, y = 1$: $P = 8(1)^3 + 1^3 - 6(1)(1) + 1 = 4$. Vì 4 không phải là số nguyên tố nên loại.
- Với $x = 1, y = 2$: $P = 8(1)^3 + 2^3 - 6(1)(2) + 1 = 5$. Vì 5 là số nguyên tố nên nhận.

Vậy cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn bài toán là $(x; y) = (1; 2)$. □

2. Gọi m^2 là số chính phương lớn nhất thỏa mãn $m^2 < s_n$ thì $s_n \leq (m + 1)^2$.

Ta chứng minh $(m + 2)^2 < s_{n+1}$.

Giả sử phản chứng $(m + 2)^2 \geq s_{n+1}$. Thế thì vì $m^2 < s_n < s_{n+1} \leq (m + 2)^2$ nên

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n < (m + 2)^2 - m^2 = 4m + 4.$$

Vì $a_{i+1} - a_i \geq 8$ với mọi $i = 1, 2, \dots$ nên

$$a_n \leq a_{n+1} - 8 < 4m - 4, \quad a_{n-1} < 4m - 12, \dots, \quad a_1 < 4m - 4(2n - 1).$$

Do đó

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &< 4nm - 4(1 + 3 + \dots + 2n - 1) = 4nm - 4n^2. \end{aligned}$$

Mà $m^2 < s_n$ nên $m^2 < 4nm - 4n^2$ hay $(m - 2n)^2 < 0$, vô lý.

Vậy giả sử phản chứng là sai, nghĩa là ta phải có $(m + 2)^2 < s_{n+1}$ từ đó suy ra $s_n \leq (m + 1)^2 < (m + 2)^2 < s_{n+1}$ tức trong khoảng $[s_n, s_{n+1})$ phải có ít nhất hai số chính phương là $(m + 1)^2$ và $(m + 2)^2$. □

Câu 5

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + 2025}{a^3(b+c)} + \frac{b^2 + 2025}{b^3(c+a)} + \frac{c^2 + 2025}{c^3(a+b)}$$

2. Cho một lưới ô vuông kích thước 24×24 , ban đầu tất cả các ô đơn vị đều được tô màu trắng. Một *nước đi* bao gồm việc chọn một hàng hoặc một cột, rồi thay đổi màu của tất cả các ô đơn vị trong hàng hoặc cột đó (từ trắng sang đen, và từ đen sang trắng). Hỏi sau một số hữu hạn nước đi, liệu lưới có thể chứa đúng 574 ô đơn vị màu đen hay không?

1. Chú ý rằng,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(a+c)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)} \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+ac+bc)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)} \quad (\text{BDT Cauchy/AM-GM}) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{2} \\ &\geq \frac{3}{2\sqrt[3]{abc}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Mặt khác, $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$ với các số thực dương a, b, c . (†)

Nên ta cũng có,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} &\geq \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{(b+c)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{(a+c)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{(a+b)} \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(a+b+c)} \quad (\ddagger) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{ac} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cuối cùng, vì $a^2 + 1 \geq 2a$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 2025}{a^3(b+c)} + \frac{b^2 + 2025}{b^3(a+c)} + \frac{c^2 + 2025}{c^3(a+b)} &\geq \frac{2a + 2024}{a^3(b+c)} + \frac{2b + 2024}{b^3(a+c)} + \frac{2c + 2024}{c^3(a+b)} \\ &\geq 2 \cdot \frac{3}{2} + 2024 \cdot \frac{3}{2} \\ &= 3039 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

2. Câu trả lời của bài toán là phủ định.

Giả sử sau một số hữu hạn các nước đi, trên lưới ô vuông có đúng 574 ô màu đen.

Tổng số ô đơn vị trên toàn bộ lưới là $24 \times 24 = 576$ (ô).

Khi đó, số ô đơn vị màu trắng còn sót lại trên lưới sẽ là $576 - 574 = 2$ (ô).

Do trên toàn bộ lưới rộng lớn chỉ có đúng 2 ô màu trắng, ta luôn có thể chỉ ra được một hình vuông kích thước 2×2 chứa đúng 1 ô màu trắng và 3 ô màu đen. (Giải thích thêm: Chọn một ô trắng bất kỳ, ô này thuộc 4 hình vuông 2×2 khác nhau. Ta dễ dàng chọn được một trong các hình vuông 2×2 đó mà không chứa ô trắng thứ hai).

Bây giờ, ta xét tính chẵn lẻ của số lượng ô màu trắng trong một hình vuông 2×2 bất kỳ trên lưới:

Ban đầu, tất cả các ô đều được tô màu trắng. Suy ra, mọi hình vuông 2×2 đều chứa đúng 4 ô trắng. Số lượng ô màu trắng ban đầu là một số chẵn.

Mỗi nước đi là việc đổi màu toàn bộ một hàng hoặc một cột. Nước đi này sẽ tác động lên một hình vuông 2×2 đang xét theo một trong hai trường hợp:

- Hàng hoặc cột được chọn **không đi qua** hình vuông 2×2 : Số ô màu trắng trong hình vuông không thay đổi.
- Hàng hoặc cột được chọn **đi qua** hình vuông 2×2 : Nó sẽ làm đổi màu đúng 2 ô đơn vị trong hình vuông đó. Giả sử trong 2 ô bị tác động có k ô đang là màu trắng ($k \in \{0, 1, 2\}$) và $2 - k$ ô đang là màu đen. Sau khi thực hiện nước đi, k ô trắng biến thành đen (mất đi k ô trắng), và $2 - k$ ô đen biến thành trắng (thêm $2 - k$ ô trắng). Vậy, sự thay đổi về số lượng ô trắng trong hình vuông 2×2 này là: $(2 - k) - k = 2 - 2k$.

Vì đại lượng $2 - 2k = 2(1 - k)$ luôn luôn là một số chẵn, nên tính chẵn lẻ của số lượng ô màu trắng trong mọi hình vuông 2×2 là một **bất biến** (không bao giờ thay đổi qua các nước đi). Ban đầu nó là số chẵn, nên sau bao nhiêu nước đi nó vẫn bắt buộc phải là một số chẵn.

Điều này mâu thuẫn hoàn toàn với lập luận ở trên, khi ta chỉ ra sự tồn tại của một hình vuông 2×2 chứa đúng 1 ô màu trắng (là một số lẻ).

Vậy, giả sử ban đầu là sai. Không thể nào đạt được trạng thái lưới chứa đúng 574 ô đơn vị màu đen. □

ĐỀ 25

LỜI GIẢI

Câu 1.

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2026$$

2. Một hộp đựng 4 bi xanh và 6 bi đỏ. Ta lần lượt rút 2 viên bi. Tính xác suất để rút được một bi xanh và một bi đỏ.

1. Ta có $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1 \Rightarrow b + c = 1 - a - 2\sqrt{abc}$, nên:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-b)(1-c)} &= \sqrt{1-b-c+bc} = \sqrt{1-(b+c)+bc} \\ &= \sqrt{1-(1-2\sqrt{abc}-a)+bc} = \sqrt{a+2\sqrt{abc}+bc} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{bc})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{bc} \\ \Rightarrow \sqrt{a(1-b)(1-c)} &= \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{bc}) = a + \sqrt{abc} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-c)(1-a)} &= \sqrt{b} + \sqrt{ca} \Rightarrow \sqrt{b(1-c)(1-a)} = b + \sqrt{abc} \\ \sqrt{(1-a)(1-b)} &= \sqrt{c} + \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(1-a)(1-b)} = c + \sqrt{abc} \end{aligned}$$

Do đó, ta được:

$$\begin{aligned} P &= a + \sqrt{abc} + b + \sqrt{abc} + c + \sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2026 \\ &= a + b + c + 2\sqrt{abc} + 2026 = 1 + 2026 = 2027 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2027$. □

2. Số cách rút ngẫu nhiên 2 viên bi từ tổng số $4 + 6 = 10$ viên bi là:

$$n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$$

Xét biến cố A : "Rút được một bi xanh và một bi đỏ". Số cách để rút được 1 viên bi xanh trong 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ trong 6 viên bi đỏ là:

$$n(A) = C_4^1 \cdot C_6^1 = 4 \cdot 6 = 24$$

Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

□

Câu 2.

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$$

2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}$$

1. Điều kiện $x, x - y - 1 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{x-y-1} + 1 \Leftrightarrow x = x-y-1 + 2\sqrt{x-y-1} + 1 \\ &\Leftrightarrow y = 2\sqrt{x-y-1} \Leftrightarrow y^2 = 4(x-y-1) \\ &\Leftrightarrow (y+2)^2 = 4x \Leftrightarrow y+2 = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \Leftrightarrow (y + \sqrt{x})^2 = xy^2 \Leftrightarrow y + \sqrt{x} = y\sqrt{x}$$

Ta có hệ mới là:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y+2 = 2\sqrt{x} \\ y+\sqrt{x} = y\sqrt{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = 2\sqrt{x} \\ 2y+(y+2) = y(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = 2\sqrt{x} \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ban đầu, ta thấy cả hai nghiệm trên đều thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -1\right), (2, 4)$. □

2. Trong 3 số x, y, z luôn có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương do $x + y + z = 0$.

Không mất tổng quát, giả sử $xy \geq 0$.

$$\text{Đặt } P = \frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2}$$

Áp dụng $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} \geq \frac{(m+n)^2}{a+b}$ với $a, b > 0$ (không cần chứng minh)

$$P + 3 = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} + 1\right) + \left(\frac{2y-1}{y^2+2} + 1\right) + \left(\frac{2z-1}{z^2+2} + 1\right) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2}$$

$$P + 3 \geq \frac{(x + y + 2)^2}{x^2 + y^2 + 4} + \frac{(z + 1)^2}{z^2 + 2}$$

$$P + 3 \geq \frac{(x + y + 2)^2}{(x + y)^2 - 2xy + 4} + \frac{(z + 1)^2}{z^2 + 2}$$

$$\Rightarrow P + 3 \geq \frac{(x + y + 2)^2}{(x + y)^2 + 4} + \frac{(z + 1)^2}{z^2 + 2} \text{ (vì } xy \geq 0 \text{)}.$$

Do $x + y + z = 0$ nên $P + 3 \geq \frac{(z - 2)^2}{z^2 + 4} + \frac{(z + 1)^2}{z^2 + 2}$

Ta chứng minh $P + 3 \geq \frac{3}{2}$. Thật vậy:

$$\frac{(z - 2)^2}{z^2 + 4} + \frac{(z + 1)^2}{z^2 + 2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(z - 2)^2(z^2 + 2) + (z + 1)^2(z^2 + 4)}{z^4 + 6z^2 + 8} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(z^2 - 4z + 4)(z^2 + 2) + 2(z^2 + 2z + 1)(z^2 + 4) \geq 3(z^4 + 6z^2 + 8)$$

$$\Leftrightarrow z^4 - 4z^3 + 4z^2 \geq 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 - 4z + 4) \geq 0 \Leftrightarrow z^2(z - 2)^2 \geq 0$$

Điều này đúng với mọi z . Dấu bằng xảy ra khi $z = 0$ hoặc $z = 2$.

Suy ra $P + 3 \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow P \geq \frac{-3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y, xy = 0, z^2(z - 2)^2 = 0, x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Vậy có điều phải chứng minh. □

Câu 3.

1. Một số nguyên dương m được gọi là “số lệch đẹp” nếu tồn tại số nguyên n sao cho

$$m^2 = (2n - 1)(2n - 4) + 18.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của $|m - n|$.

2. Cho p là một số nguyên tố và n là số nguyên dương nhỏ nhất, lớn hơn 1, sao cho $n^6 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số $(n + 1)^6 - 1$ hoặc $(n + 2)^6 - 1$ chia hết cho p .

1. Ta có phương trình:

$$m^2 = (2n - 1)(2n - 4) + 18$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4n^2 - 10n + 22$$

Nhân cả hai vế với 4 để tạo hằng đẳng thức:

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 16n^2 - 40n + 88$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = (4n - 5)^2 + 63$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - (4n - 5)^2 = 63$$

$$\Leftrightarrow (2m - 4n + 5)(2m + 4n - 5) = 63$$

Do $m, n \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$, suy ra $(2m - 4n + 5)$ và $(2m + 4n - 5)$ là các ước nguyên của 63.

Mặt khác, tổng hai thừa số là:

$$(2m - 4n + 5) + (2m + 4n - 5) = 4m > 0$$

Do đó, cả hai thừa số đều phải là số dương.

Ta có: $m = \frac{\text{Tổng}}{4}$ và $n = \frac{\text{Hiệu} + 10}{8}$ (với Hiệu = Thừa số sau - Thừa số trước).

Lập bảng xét các cặp ước dương của 63 ta tìm được các giá trị có thể có của $|m - n|$ là 3 và 7. Vậy giá trị lớn nhất có thể có của $|m - n|$ là 7. $\square$

2. Ta có $n^6 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.

Vì $n^6 - 1 \vdots p$ và p là số nguyên tố nên p phải chia hết ít nhất một trong 4 nhân tử trên.

Trường hợp 1: $p = 2$.

Vì $n > 1$ nhỏ nhất thỏa mãn $n^6 - 1 \vdots 2$ nên n phải là số lẻ nhỏ nhất lớn hơn 1 $\Rightarrow n = 3$.

Khi đó $(n + 2)^6 - 1 = 5^6 - 1$ là số chẵn, nên chia hết cho 2 (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $p > 2$. Ta xét các khả năng của nhân tử chia hết cho p :

• **Khả năng 1:** $p \mid (n - 1) \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{p}$.

Vì $n > 1 \Rightarrow n \geq p + 1$. Tuy nhiên, với số $p - 1 \geq 2$, ta có $(p - 1)^6 - 1 \equiv (-1)^6 - 1 = 0 \pmod{p}$. Điều này mâu thuẫn với tính "nhỏ nhất" của n (vì $p - 1 < p + 1 \leq n$).

Vậy khả năng này không xảy ra.

• **Khả năng 2:** $p \mid (n + 1) \Rightarrow n \equiv -1 \pmod{p}$.

Kết hợp điều kiện n nhỏ nhất và $n \leq p - 1$ (đã chứng minh ở trên), ta bắt buộc có $n = p - 1$.

Khi đó: $(n + 2)^6 - 1 = (p + 1)^6 - 1 \equiv 1^6 - 1 = 0 \pmod{p}$. Do đó $(n + 2)^6 - 1 \vdots p$.

• **Khả năng 3:** $p \mid (n^2 + n + 1)$.

Ta có: $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1) + n \equiv n \pmod{p}$.

Suy ra: $(n + 1)^6 = ((n + 1)^2)^3 \equiv n^3 \pmod{p}$.

Mặt khác, $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1) \vdots p \Rightarrow n^3 \equiv 1 \pmod{p}$.

Từ đó suy ra $(n + 1)^6 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (n + 1)^6 - 1 \vdots p$.

• **Khả năng 4:** $p \mid (n^2 - n + 1)$.

Ta có: $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 = (n^2 - n + 1) - n \equiv -n \pmod{p}$.

Suy ra: $(n - 1)^6 = ((n - 1)^2)^3 \equiv (-n)^3 = -n^3 \pmod{p}$.

Mặt khác, $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) \vdots p \Rightarrow n^3 \equiv -1 \pmod{p}$.

Từ đó suy ra $(n - 1)^6 \equiv -(-1) = 1 \pmod{p} \Rightarrow (n - 1)^6 - 1 \vdots p$.

Vì n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 thỏa mãn tính chất chia hết, nên $n - 1$ không thể là số lớn hơn 1 (nếu không $n - 1$ sẽ là giá trị nhỏ hơn n thỏa mãn). Do đó $n - 1 \leq 1$.

Mà $n > 1 \Rightarrow n - 1 \geq 1$.

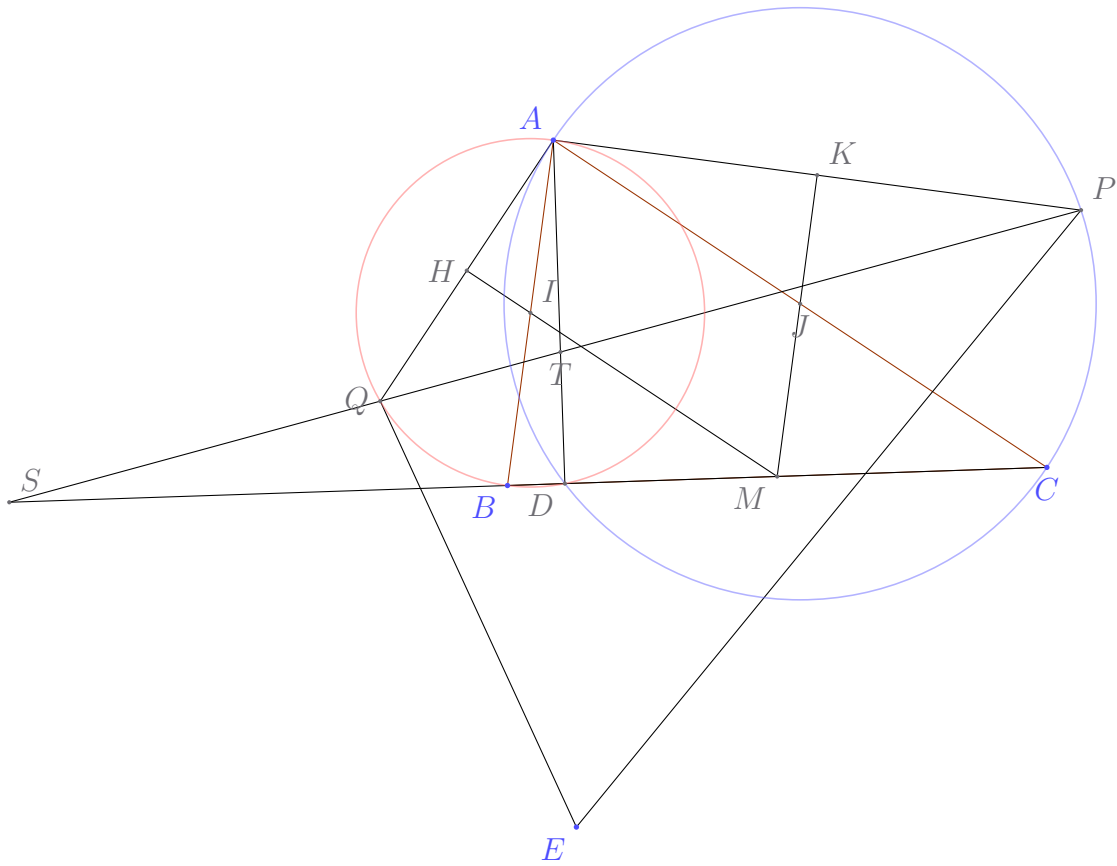
Bắt buộc $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$. Thay $n = 2$ vào $p \mid (n^2 - n + 1)$ ta được $p \mid 3 \Rightarrow p = 3$.

Với $p = 3, n = 2$, ta xét: $(n + 2)^6 - 1 = 4^6 - 1 \equiv 1^6 - 1 = 0 \pmod{3}$. Do đó $(n + 2)^6 - 1 \vdots p$.

Vậy trong mọi trường hợp, luôn có ít nhất một trong hai số $(n + 1)^6 - 1$ hoặc $(n + 2)^6 - 1$ chia hết cho p . $\square$

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < CA$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với D khác A .

1. Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.
2. Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với P khác A . Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với Q khác A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.
3. Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.



1. Để chứng minh $AIMJ$ là hình bình hành. Và dùng tính chất góc đối của tứ giác nội tiếp để chứng minh ba điểm B, D, C thẳng hàng.
2. Ta chứng minh $ADMK$ nội tiếp đường tròn. Từ giả thiết, ta có $MJ \parallel AB$. Hơn nữa $AB \perp AP$ (AP là tiếp tuyến tại A của $(I; IA)$) nên $MJ \perp AP$. Kết hợp điều trên với $JA = JP$, ta suy ra MJ là đường trung trực của AP . Từ đây suy ra $MK \perp AP$ hay $\widehat{AKM} = 90^\circ$. Suy ra $ADMK$ nội tiếp.
Gọi H là giao điểm của MI và AQ . Chứng minh tương tự như trên, ta có MH là đường trung trực của AQ và $AHMK$ nội tiếp. Kết hợp với $ADMK$ nội tiếp, ta suy ra A, H, D, M, K cùng nằm trên một đường tròn.
Ta chứng minh $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$. Ta có H là trung điểm của AQ (MH là đường trung trực của AQ), D là trung điểm của AE nên HD là đường trung bình của tam giác AEQ . Suy ra $HD \parallel QE$, từ đó thu được $\widehat{QEA} = \widehat{HDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Ta có K là trung điểm của AP (MK là đường trung trực của AP), D là trung điểm của AE nên KD là đường trung bình của tam giác AEP . Suy ra $KD \parallel PE$, dẫn đến $\widehat{PEA} = \widehat{KDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

Ta có: $\widehat{PEQ} = \widehat{PEA} + \widehat{QEA} = \widehat{KDA} + \widehat{HDA} = \widehat{HDK}$ (8) Hơn nữa $\widehat{HDK} + \widehat{PAQ} = \widehat{HDK} + \widehat{HAK} = 180^\circ$ (do A, H, D, M, K cùng nằm trên một đường tròn) (9) Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.

3. Ta cần chứng minh $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$. Ta có: $\widehat{QDT} = \widehat{QDA} = \widehat{QBA}$ (do $AQBD$ nội tiếp) (10) Và $\widehat{PDT} = \widehat{PDA} = \widehat{PCA}$ (do $APCD$ nội tiếp) (11)

Xét tam giác ABQ vuông tại Q và tam giác ACP vuông tại P có $\widehat{QAB} = \widehat{PAC}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$). Suy ra: $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$ dẫn đến $\widehat{QBA} = \widehat{PCA}$ (12)

Từ (10), (11), (12) suy ra $\widehat{QDT} = \widehat{PDT}$ kéo theo DT là tia phân giác trong của $\widehat{QDP}$, vậy:

$$\frac{TP}{TQ} = \frac{DP}{DQ} \quad (13)$$

Ta có: $DS \perp DT$ nên DS là tia phân giác ngoài của $\widehat{QDP}$, suy ra:

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{DP}{DQ} \quad (14)$$

Từ (13) và (14) suy ra $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$ hay $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$. □

Câu 5. Cho 40 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ và $b_1, b_2, \dots, b_{21}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{19} \leq 200, \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{21} \leq 200. \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại bốn số a_i, a_j, b_k, b_p ($i < j, k < p$) sao cho $a_j - a_i = b_p - b_k$.

Xét các tổng có dạng $a_m + b_n$ với $m \in \{1, 2, \dots, 19\}$ và $n \in \{1, 2, \dots, 21\}$. Ta thấy có $19 \cdot 21 = 399$ tổng như vậy, và mỗi tổng nhận giá trị nguyên từ 2 đến 400 (có 399 giá trị).

Ta sẽ chứng minh có hai tổng bằng nhau. Thật vậy, giả sử không có tổng nào bằng nhau, khi đó 399 tổng này sẽ nhận đủ các giá trị từ 2 đến 400. Suy ra tổng nhỏ nhất phải bằng 2 và tổng lớn nhất bằng 400. Nói cách khác, ta có $a_1 + b_1 = 2$ và $a_{19} + b_{21} = 400$. Kết hợp với giả thiết, ta được $a_1 = b_1 = 1$ và $a_{19} = b_{21} = 200$, từ đó suy ra $a_1 + b_{21} = a_{19} + b_1 = 201$, mâu thuẫn.

Vậy phải có hai tổng bằng nhau. Giả sử hai tổng bằng nhau đó là $a_i + b_p$ và $a_j + b_k$. Thế thì ta có $a_j - a_i = b_p - b_k$. Khẳng định của bài toán được chứng minh. □

Tài liệu tham khảo

- [1] MATHNET: <https://mathnet.mit.edu/explorer.html>
- [2] Diễn đàn toán học: <https://diendantoanhoc.org/>
- [3] Facebook
- [4] TOANMATH.com: <https://toanmath.com/>
- [5] Đề thi học sinh giỏi tỉnh, đề thi thử vào chuyên, đề thi chính thức vào chuyên các tỉnh các năm
- [6] Một số chuyên đề tổ hợp (Dành cho học sinh trung học cơ sở) - **Nguyễn Tiến Lâm, Dương Minh Khôi**
- [7] Tuyển chọn CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC TRỌNG TÂM - **Nguyễn Trung Kiên**
- [8] Một số chủ đề số học hướng tới kì thi HSG và chuyên toán - **Nguyễn Nhất Huy**
- [9] 96+ đề ôn luyện chuyên toán - **Võ Quốc Bá Cẩn**
- [10] Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán tổ hợp tập 4 - **Lê Anh Vinh**
- [11] Bộ đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường chuyên và trường thường chất lượng cao môn toán - **Lưu Bá Thắng**

Một số tài liệu phục vụ cho quá trình ôn thi chuyên

- [1] https://drive.google.com/file/d/1o_QNbi8wckxHuzw18Guha5xO2-WIPvp8/view?usp=drive_link
- [2] https://drive.google.com/file/d/1xZPoBODaO27Pwars1Mdv1LU8Zz07Nrzt/view?usp=drive_link
- [3] https://drive.google.com/file/d/1Z3UGy4RgBCcBc3PP9Rsf3Z6P-2OXh2WM/view?usp=drive_link
- [4] https://drive.google.com/file/d/1aaOB0Lt-oytROAzGcC_JAFAc2eF_GckY/view?usp=drive_link
- [5] https://drive.google.com/file/d/1325VbcobMIUoarUoYtTmfMVMINWCD0zF/view?usp=drive_link
- [6] https://drive.google.com/file/d/15iUnyrFYJeIdCKRIzEMKuOJnu99QCYIH/view?usp=drive_link
- [7] https://drive.google.com/file/d/13DzHN9-U5sRVByVPSGu59B-tWj_ra2T1/view?usp=drive_link
- [8] https://drive.google.com/file/d/1_A2szA-4KW_o7mDh308EiH8ABOBgXtnb/view?usp=drive_link
- [9] https://drive.google.com/file/d/1JPxNkIpVEjd4nyrV5LkJytLiYT430Ehg/view?usp=drive_link
- [10] https://drive.google.com/drive/folders/1t6yiDNm8i7te_1UJH0zOcz2k2L6H-iHd?usp=sharing

Trên đây là một số tài liệu chọn lọc bản thân tôi dùng để ôn thi chuyên, được lưu trữ vào mục drive của tôi nay xin chia sẻ tới các bạn. Có một file hình của anh **Nguyễn Ngọc Sơn** mà tôi thấy rất hay cho các bạn đam mê hình học có thể làm thử. Link ở vị trí số 10 là một phần đề thi tôi đã luyện tập trong năm lớp 9, còn lại đa phần là bài tập các phần khác nhau để các bạn làm. Khuyến khích các bạn mua những quyển sách đã kể tên ở phần tài liệu tham khảo về học, đó cũng là những quyển sách tôi đã dùng để ôn tập.

Mong nó sẽ có ích cho các bạn học sinh. Ngoài ra những người trẻ có thể liên hệ với tôi qua https://www.facebook.com/nguyen.lan.anh.831387/?locale=vi_VN để thuận tiện hơn là gmail.

Tôi yêu Chuyên Tuyên Quang!